МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

С.Д. Кулик

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ (критерии и задачи)

Учебное пособие

Рекомендовано УМО "Ядерные физика и технологии" в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

Москва 2010

УДК 519.81(075)
ББК 22.18я7
К 90

Кулик С.Д. Элементы теории принятия решений (критерии и задачи): учебное пособие. – М.: НИЯУ МИФИ, 2010. –188 с.

Очень кратко с позиций теории принятия решений изложены важные задачи, связанные с принятием решений, и критерии принятия решений в различных информационных ситуациях. Задача принятия решений рассматривается как задача проверки гипотез. Выделены следующие четыре группы гипотез: *вероятные, статистические, детерминированные, квантовые.* На специальных примерах подробно и очень тщательно рассмотрено решение некоторых задач проверки гипотез. Особое внимание уделено *детерминированным гипотезам.*

Пособие в основном ориентировано на студентов НИЯУ МИФИ, не только изучающих теорию принятия решений, но и применяющих её в своей учебной и научной деятельности.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент канд. техн. наук, доц. О.А. Мишулина

ISBN 978-5-7262-1221-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Главная цель настоящего пособия — ознакомить читателя с основными используемыми понятиями и помочь ему приобрести практический навык в решении задач проверки гипотез.

При работе над пособием был учтён тот факт, что при изучении дисциплины "*Теория принятия решений* (ТПР)" читатель уже знаком с теорией *множеств*, теорией *вероятностей* (ТВ) и *математической статистикой* (МС), а также владеет методами *оптимизации*, *математического моделирования и математического анализа,* знаком с *нейронными сетями.*

В процессе разработки аналогичной дисциплины и при написании лекционных материалов были широко использованы подходящие источники многих авторов (приведённые в конце каждой главы). Всем им автор искренне благодарен.

Сейчас, к сожалению, достаточно часто нарушаются права авторов, поэтому каждый раз, где это необходимо, даны ссылки на источник заимствования. Не всегда это заимствование было дословным. Иногда текст подвергался изменению, переработке и дополнению без прямого указания по тексту об этом. Если при этом, невзначай, оказались затронуты чьи-то интересы, то автор заранее просит его извинить.

Особую благодарность автор выражает рецензенту пособия кандидату технических наук, доценту *О.А. Мишулиной*, чьи замечания и пожелания позволили значительно улучшить подачу материала и выявить опечатки и неточности. Как иногда бывает с творческими людьми, автор не всегда согласен с мнением рецензента, а поэтому все последующие замеченные недостатки автор просит относить на его счёт.

Общение со студентами полезно и поучительно. Автор очень благодарен многим студентам НИЯУ МИФИ, с которыми ему приходилось общаться, обсуждая трудные, но интересные фрагменты этой удивительной теории принятия решений.

Автор

sedmik@mail.ru
sedmik@hotmail.com

ВВЕДЕНИЕ

Современные *информационные системы* (ИС) и, в частности, *автоматизированные системы обработки информации и управления* (АСОИУ) всё больше влияют на наше общество. Сегодня очень трудно представить нашу жизнь без них. Информационные технологии всё больше проникают в различные *технические системы* (ТС) и позволяют эффективно решать многие важные специальные задачи в различных областях: медицине, военном деле, экономике, криминалистике и др.

В настоящее время имеющиеся ИС и в частности АСОИУ в ряде случаев не обеспечивают растущие потребности пользователей.

К важным факторам, которые влияют на эффективность применения информационных систем, можно отнести:

- выбор показателей эффективности ИС;
- выбор критериев эффективности ИС;
- адекватную постановку задачи оптимизации;
- эффективное решение оптимизационной задачи.

Поиск критериев эффективности ИС (АСОИУ) и разработка на их основе алгоритмов принятия решений связано с фундаментальными исследованиями в:

- теории принятия решений;
- теории распознавания образов;
- теории нейронных сетей;
- теории оптимизации.

Эти исследования очень важны и необходимы. Полученные результаты могут предоставить новые пути построения показателей эффективности и критериев эффективности, а также разработку новых методов решения задач оптимизации для повышения эффективности ИС.

Хорошо известно, что модель создаваемой системы позволяет до реального её построения оценить будущую её эффективность.

Оценка эффективности невозможна без показателей эффективности и критериев эффективности. Поэтому значительная часть усилий исследователей была сосредоточена на критериях и показателях эффективности.

Для создаваемых ИС (АСОИУ) их эффективность во многом определяется не только удачно выбранными критериями эффективности, но и наличием у разработчика некоторой модели системы, позволяющей адекватно оценивать её эффективность. Но этого ещё не достаточно для решения практических задач.

Специалисту (например, *лицу, принимающему решение* (ЛПР)), чтобы действительно построить эффективную систему, необходимо <u>уметь принимать</u> (или выбирать) именно правильное решение (т.е. эффективное решение с точки зрения принятого критерия эффективности для данной ИС).

Имеющиеся варианты возможных решений можно представить как набор некоторых гипотез, а сам непосредственно выбор правильного решения может быть сведён к проверке этих гипотез. В результате проверки некоторая часть гипотез может быть отклонена. Из оставшихся гипотез ЛПР должен выбрать одну и принять окончательное решение. Сокращение числа гипотез в общем-то сокращает общие затраты на принятие решения.

Эффективное освоение дисциплины ТПР <u>не возможно</u> без введения необходимых определений. Многие используемые далее определения связаны с прикладными задачами, поэтому они могут не содержать некоторых деталей, важных с точки зрения формальной теории.

> Важно отметить, что для любого заданного определения или термина (из рассматриваемых далее) <u>практически всегда</u> можно подобрать *контрпример*, т.е. найти такое **нечто**, что, с одной стороны, это **нечто** удовлетворяет определению, а с другой — это **нечто** не удовлетворяет определению.

Построение различных ИС показало, что на современном этапе инженер в области информационных технологий неизбежно столкнётся с проблемой принятия решения. На практике необходимо быть подготовленным к этому.

Именно тому, как следует выполнять проверку некоторых гипотез, и посвящено данное пособие.

Постановка задачи принятия решений как задача проверки гипотез

Из практики решения конкретных задач известно, что одно и то же решение может быть найдено разными способами путём применения различных методов и теорий и сведения исходной постановки задачи к другой постановке, решение которой позволяет достигнуть конечной цели. Это в полной мере относится и к задачам принятия решений, которые приходится решать (т.е. *принимать решение*), имея дело с техническими системами.

Определение 0.1

Правильное решение (см. и ср. [**6**, с. 16]) — количественно обоснованный выбор наилучшего образа действий, ведущих к достижению поставленной *цели* в данной ситуации.

Добиться принятия правильного и своевременного решения как человеком, так и автоматом на практике не так просто. В целом можно выделить два направления, в которых приходится принимать решения.

Первое — принятие решения человеком-оператором.

Второе — принятие решения устройством (блоком, автоматом) в соответствии с некоторым алгоритмом.

Можно полагать, что **теория принятия решений** (ТПР) — совокупность различных методов, ориентированных на поиск лучшего решения среди возможных альтернатив, позволяющих избежать сплошного перебора вариантов.

Так, существуют различные методы проверки *статистических* гипотез, имеется теоретическая и практическая основа выбора *вероятных* гипотез, и есть различные методы решения оптимизационных задач, позволяющие проверять некоторые *детерминированные* гипотезы.

В последнее время появилось новое целое научное направление (см. [**1**, **2**, **7**-**14**] и др.) на стыке физики и математики — это квантовая теория вероятностей, квантовая теория проверки гипотез, квантовые вычисления и квантовая информация.

В этих условиях изучение методов решения даже узкого класса задач (как задачи проверки гипотез) из области теории принятия решений представляется сегодня крайне актуальным.

Достаточно часто специалистам приходится выяснять, в каком состоянии находится данный объект, например техническая система. Обычно о состоянии технической системы, например АСОИУ, высказываются некоторые предположения в виде *гипотез*. Простейшими гипотезами могут быть следующие суждения:

$\boldsymbol{H}_1$={*отказ ОЗУ*}, $\boldsymbol{H}_3$={*отказ процессора*},

$\boldsymbol{H}_2$={*отказ системы охлаждения*}, $\boldsymbol{H}_4$={*АСОИУ исправна*}.

Задача специалиста — выяснить, какую из имеющихся гипотез следует ему принять.

Для удобства на практике *гипотезы* иногда обозначают некоторой буквой, например $\boldsymbol{H}$, а если их несколько, то иногда используют несколько разных букв или индекс, например $\boldsymbol{H}_k$.

Определение 0.2 [**2**]
Гипотеза (Г) — это некоторое суждение (высказывание, предположение) о некотором объекте (например, о технической системе или о её свойстве), справедливость (истинность) которого требуется установить (проверить), а саму гипотезу – принять или отвергнуть.

Далее будем выделять четыре группы гипотез [**2**]:

1) *вероятные*;
2) *статистические*;
3) *детерминированные*;
4) *квантовые*.

Имеются следующие предпосылки к такому разделению гипотез:

1) многие детерминированные, статистические и вероятные модели уже хорошо исследованы, и на их основе разработаны различные методы решения определённого класса задач (в том числе и задач проверки гипотез), которые уже стали некоторым своеобразным стандартом;

2) практика показала, что при решении реальных задач порой удаётся свести исходную задачу к задаче в новой постановке о проверке некоторой гипотезы, которую в силу различных обстоятельств удобно (и разумно) полагать либо вероятной, либо статистической, либо детерминированной, либо (см. [**1**]) квантовой;

3) получены новейшие практические и теоретические достижения в области квантовой механики, квантовой теории вероятностей и квантовой теории проверки гипотез;

4) получены новейшие практические и теоретические достижения в области построения квантового вычислителя;

5) обычно на практике применение стандартных методов позволяет получить решение с меньшими затратами, если, конечно, удалось свести исходную задачу к задаче в такой постановке, для которой уже известен специалисту метод её решения.

Такой подход решения задач имеет как преимущества, так и недостатки.

Преимущества от сведения задач принятия решений к задачам проверки гипотез заключаются в следующем:

- наличие известного метода решения задачи, и поэтому не требуется разрабатывать новый метод;
- как правило, уменьшается время принятия решения, и сокращаются общие затраты на выработку решения;
- имеется потенциальная возможность выработки более эффективного решения.

Недостатки, которые связаны с решением задач проверки гипотез, состоят в следующем:

- может отсутствовать подходящий метод решения задачи проверки гипотез;
- иногда требуется затратить определённые усилия на то, чтобы свести исходную задачу к задаче проверки гипотез;
- из-за сложности исходной задачи её не всегда можно решить именно как задачу проверки гипотез, например, невозможно свести исходную постановку задачи к постановке задачи проверки гипотез.

Далее будем придерживаться следующих достаточно общих определений для каждой из введённых четырех групп гипотез.

Определение 0.3 [**2**]
Вероятная гипотеза (ВГ) — это гипотеза, явно или косвенно опирающаяся на вероятностную модель.

<u>Определение 0.4</u> [**2**]
Статистическая гипотеза (СГ) — это гипотеза, явно или косвенно опирающаяся на некоторую статистическую модель.

<u>Определение 0.5</u> [**2**]
Детерминированная гипотеза (ДГ) — это гипотеза, явно или косвенно опирающаяся на некоторую детерминированную модель.

<u>Определение 0.6</u> [**2**]
Квантовая гипотеза (КГ) — это гипотеза, явно или косвенно опирающаяся на некоторую модель квантовой теории вероятностей [**5**, с. 226] в рамках квантовой теории проверки гипотез [**1**; **5**, с. 97, 98, 384, 668].

Кратко рассмотрим некоторые несколько упрощенные примеры постановок задач проверки различных гипотез. Эти примеры даны без решений. Как решать первые два примера, показано в работе [**2**], следующий, третий, пример — в работах [**15**, **16**]. Данная работа посвящена тому, как решать четвёртый и пятый примеры.

Пример **0.А** (вероятные гипотезы) [**2**]

Имеется 7 *попарно несовместных* и образующих *полную группу* событий, т.е. некоторых гипотез (событий) $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2,..., \boldsymbol{H}_7$.

Известны все априорные вероятности этих гипотез $P(\boldsymbol{H}_i)$.

Известны также все условные вероятности $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H}_i)$, где $\boldsymbol{A}$ — некоторое событие, которое по условию задачи наступило, причём вероятность его появления есть $P(\boldsymbol{A})>0$, и наступает это событие $\boldsymbol{A}$ только при появлении одного из событий (гипотез) $\boldsymbol{H}_i$, где $\boldsymbol{i}=1, 2, 3,..., 7$.

Необходимо определить среди гипотез $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2,..., \boldsymbol{H}_7$ наиболее вероятную гипотезу $\boldsymbol{H}_k$ после наступления события $\boldsymbol{A}$, т.е. найти максимальную условную вероятность $P(\boldsymbol{H}_i|\boldsymbol{A})$ ■

На практике выбор (поиск) наиболее вероятной гипотезы $\boldsymbol{H}_k$ может быть выполнен с применением *формулы Байеса* [**4**].

***Пример* 0.Б** (вероятные гипотезы) [**2**]

Радиоперехват сигнала с торпедоносца показал, что произошло событие $\boldsymbol{A}$={*торпедирован корабль*}, но неизвестно какой. Выясняется тип корабля, подвергнувшегося торпедной атаке торпедоносца противника. Выдвинуты (*попарно несовместные* и образующие *полную группу* событий) четыре гипотезы:

$\boldsymbol{H_1}$={*подводная лодка*}, $\boldsymbol{H_3}$={*тральщик*},
$\boldsymbol{H_2}$={*авианосец*}, $\boldsymbol{H_4}$={*пассажирский лайнер*}.

Согласно данным разведки, для данного района и времени боевых действий $P(\boldsymbol{H_1})=\mathbf{0.15}$; $P(\boldsymbol{H_2})=\mathbf{0.25}$; $P(\boldsymbol{H_3})=\mathbf{0.2}$; $P(\boldsymbol{H_4})=\mathbf{0.4}$.

Согласно военной статистике, условные вероятности события $\boldsymbol{A}$ при гипотезах $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{H_2}$, $\boldsymbol{H_3}$, $\boldsymbol{H_4}$ равны: $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_1})=1/4$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_2})=7/12$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_3})=7/10$, $P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H_4})=1$.

Найти апостериорные вероятности гипотез. Какова вероятность того, что торпедирована именно *подводная лодка* (т.е. чему равна вероятность $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})$)? Какая гипотеза наиболее вероятна после известия о событии $\boldsymbol{A}$? ■

На практике подобные задачи на определение условной вероятности $P(\boldsymbol{H_1}|\boldsymbol{A})$ или на выбор (поиск) наиболее вероятной гипотезы $\boldsymbol{H_k}$ могут быть выполнены (как и в предыдущем примере) с помощью *формулы Байеса* (см. [**4**] и др.).

***Пример* 0.В** (см. и ср. [**15**, с. 100]) (статистические гипотезы)

Владелец автозаправки был замечен в недоливе водителям дорогих марок бензина. В ёмкости (например, канистре) должно находиться 50 литров бензина. Были проверены 100 ёмкостей у случайных водителей (заказавших по 50 литров дорогих марок бензина), и было обнаружено, что в среднем в ёмкости водителя находится 49.8 литров бензина.

Предполагая, что *стандартное отклонение* (**с.к.о.**) для емкости в 50 литров есть 0.5 литра, определить, является ли выявленное отклонение значимым, т.е. противоречит ли полученный результат гипотезе $\boldsymbol{H_0}$ при уровне значимости $\boldsymbol{\alpha}=0.05$, что в среднем в указанную ёмкость разливается 50 литров бензина ■

На практике проверка статистической гипотезы $\boldsymbol{H_0}$ выполняется одним из известных методов (см. [**3**, **16**] и др.) проверки статистических гипотез.

***Пример* 0.Г** (детерминированные гипотезы) [**18**, с. 202-203]

Используя критерий Вальда, принять решение (выбрать стратегию) в случае следующей платёжной матрицы $|\boldsymbol{a_{ij}}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A}_i$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)		
	$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$
$\boldsymbol{A_1}$	20	30	15
$\boldsymbol{A_2}$	75	20	35
$\boldsymbol{A_3}$	25	80	25
$\boldsymbol{A_4}$	85	5	45

Высказана следующая гипотеза:

$$\boldsymbol{H_{(0)}}=\{\textit{оптимальная стратегия есть } \boldsymbol{A_2}\}.$$

Требуется проверить гипотезу $\boldsymbol{H_{(0)}}$, т.е. установить, имеет ли место эта гипотеза или нет (или иначе — справедлива гипотеза $\boldsymbol{H_{(0)}}$ или нет) ■

***Пример* 0.Д** (см. и ср. [**17**, с.38]) (детерминированные гипотезы)

Ищется наименьшее значение функции $\boldsymbol{f}(x, y)$ в области её определения (x>0, y>0):

$$\boldsymbol{f}(x,y)=\left[x+\frac{1}{x}+y^3\sqrt[4]{x^3}+\frac{1}{y\sqrt{x}}+\frac{1}{2y^2\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3y^3\sqrt[4]{x}}\right]^4.$$

Высказана следующая гипотеза:

$$\boldsymbol{H_0}=\{\textit{минимум } \boldsymbol{f}(x,y) \textit{ есть} \left[29^4 6^{-4}\right]\}.$$

Требуется проверить гипотезу $\boldsymbol{H_0}$, т.е. установить, имеет ли место эта гипотеза или нет (или иначе — справедлива гипотеза $\boldsymbol{H_0}$ или нет) ■

На практике проверка детерминированной гипотезы $\boldsymbol{H_0}$ выполняется путём поиска минимума функции, применяя, например, метод *геометрического* программирования (см. [**17**] и др.) и сравнения найденного истинного минимума с тем, что указан в гипотезе $\boldsymbol{H_0}$.

Список спользуемой литературы (источники)

1. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания.—М.: Мир, 1979.—344с.

2. Кулик С.Д. Теория принятия решений (элементы теории проверки вероятных гипотез): учебное пособие.—М.: МИФИ, 2007.—152с.

3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники.—Кн.2.—М.: Советское радио.—1968.—504с.

4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения.–М.: Наука, 1988.—480с.

5. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия.—М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999.—910с.

6. Абчук В.А. Теория риска в морской практике.–Л.: Судостроение, 1983.–152с.

7. Яковлев В.П., Кондрашин М.П. Элементы квантовой информатики.—М.: МИФИ, 2004.—80с.

8. Кулик С.Д. Схемотехнические решения для реализации квантового компьютера //Научная сессия МИФИ-2006. Сборник научных трудов в 16 т. Т.12: Информатика и процессы управления. Компьютерные системы и технологии. —М.: МИФИ, 2006.—С.52—53.

9. Квантовый компьютер и квантовые вычисления.—Т2.—Ижевск: Ред. журн. Регулярная и хаотическая динамика, 1999.—287с.

10. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация.—М.: Мир, 2006.—824с.

11. Кулик С.Д., Берков А.В., Яковлев В.П. Введение в теорию квантовых вычислений (методы квантовой механики в кибернетике): учебное пособие.— В 2-х кн.— Кн. 1. —М.: МИФИ, 2008.—212 с.

12. Кулик С.Д., Берков А.В., Яковлев В.П. Введение в теорию квантовых вычислений (методы квантовой механики в кибернетике): учебное пособие.— В 2-х кн. —Кн. 2. — М.: МИФИ, 2008.—532 с.

13. Кулик С.Д. Квантовая программа, квантовая база данных и квантовый компьютер //Научная сессия МИФИ-2007. Сборник научных трудов в 17 т. Т.12: Информатика и процессы управления. Компьютерные системы и технологии.—М.: МИФИ, 2007.—С.101-103.

14. Кулик С.Д. Подход к обучению теории вероятности в рамках исследований квантовых вычислений //Научная сессия МИФИ-2009. XIII выставка-конференция "Телекоммуникации и новые информационные технологии в образовании ". Сборник научных трудов. —М.: МИФИ, 2009. — С.58-59.

15. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов.—М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005.—254с.

16. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.—М.: Высш. школа, 1979.—400с.

17. Бекишев Г.А., Кратко М.И. Элементарное введение в геометрическое программирование.—М.: Наука, 1980.—144с.

18. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология.—М.: Высшая школа, 2001.—208с.

«И тайну чтоб узнать, догадки надо много»
А.С. Грибоедов [**43**, с.88]

ЗАДАЧИ ВЫБОРА РЕШЕНИЙ

Глава 1

ЗАДАЧИ ВЫБОРА РЕШЕНИЙ

<u>Содержание</u>

Информационные ситуации: детерминированная, статистически определённая, статистически неопределённая (игровая). Критерии принятия решений в различных информационных ситуациях. Однокритериальные и многокритериальные задачи принятия решений. Сведение многокритериальных задач к скалярным задачам. Парето-оптимальность. Элементы теории игр. Примеры решённыхзадач.

1.1. Общие положения

На практике *задачи принятия решений* (ЗПР) можно классифицировать по трём признакам:

1) по числу целей и соответствующих им **критериев** оптимальности (ЗПР делят на *одноцелевые* или <u>однокритериальные</u> (т.е. **скалярные**) и *многоцелевые* или <u>многокритериальные</u> (т.е. **векторные**));

2) по наличию или отсутствию зависимости критерия оптимальности и ограничений от времени (ЗПР делят на **статические** (т.е. не зависящие от времени) и **динамические** (т.е. зависящие от времени));

3) по наличию СЛУЧАЙНЫХ и НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ факторов ЗПР делят на три больших группы (класса):

- принятие решения в условиях *<u>определённости</u>*, или **детерминированные** ЗПР (есть однозначная детерминированная связью между принятым решением *лицом, принимающим решение* (ЛПР) и его результатом);
- принятие решений *<u>при риске</u>*, или **стохастические** ЗПР (каждое принятое решение может привести к одному из множества возможных исходов (каждый исход имеет вероятность появления; предполагается, что эти вероятности заранее известны ЛПР));
- принятие решений в условиях *<u>НЕопределённости</u>* (каждое

принятое решение ЛПР может привести к одному из множества возможных исходов, вероятности появления которых для ЛПР неизвестны).

На практике учёт случайных факторов, заданных распределением выполняют двумя способами:

1) замена случайных параметров их математическими ожиданиями (т.е. сведением *стохастической* задачи к *детерминированной*) [**2**, с.32-33, 38];

2) "**взвешиванием**" показателя качества по вероятности (этот прием иногда называют "**оптимизация в среднем**" [**2**, с.31-37]).

Информационные ситуации, неопределённость и выбор критерия

На практике приходится принимать решение при наличии *неопределённости*. Эта неопределённость возникает достаточно часто, и с ней приходится считаться.

Орган принятия решения (ОПР) обычно вынужден действовать в условиях *неопределённости* (ОПР обладает меньшим количеством **информации** для принятия решения, чем это необходимо для целесообразной организации его действий) [**1**, с.8].

Первая причина *неопределённости* [**5**, с.26] — это неполнота, недостаточность наших знаний об окружающем мире (т.е. неосведомлённость). Чем меньше мы обладаем знанием в той области, где следует принять решение, тем больше имеется неопределённости при выборе решений, и наоборот, чем больше мы знаем, тем меньше неопределённость и нам легче (проще) сделать выбор в пользу того или иного решения.

Вторая причина *неопределённости* [**5**, с.27] — это случайность (случайностью называют то, что в сходных (похожих) условиях происходит неодинаково, причём заранее нельзя предсказать, что и как будет на этот раз). Как бы мы ни старались больше знать в той области, где следует принять решение, всё равно может иметь место случай и может произойти всё не так, как это виделось при выработке решения.

Специалисты используют <u>четыре</u> различных подхода к понятию **случайности**, опирающиеся на характерные свойства случайных последовательностей:

1) частотоустойчивость;
2) хаотичность;
3) типичность;
4) непредсказуемость.

Для рассмотрения *случайности* учёными применяются важнейшие в **теории алгоритмов** понятия, такие как *вычислимость*, *перечислимость*, *энтропия* и *колмогоровская сложность*. В настоящее время <u>классическая теория вероятностей</u> не может объяснить, что такое *случайность*. Опираясь на эти четыре различных подхода к понятию *случайности*, исследователи попытаются выяснить и [**39**]: "определить, можно ли, например, индивидуальную последовательность нулей и единиц считать случайной или нет". Подробнее о *случайности* см. работы [**39**, **40**, **41**, **50**] и др.

Третья причина *неопределённости* [**5**, с.28] — это противодействие. Специалисты полагают, что *неопределённость,* неясность обстановки появляется не сама по себе (т.е. естественным путём), а насаждается искусственно (во вред нам). Имеется некто, кто намеренно мешает нашим планам. Такое противодействие есть причина *неопределённости*.

Примерами возникновения этой неопределённости могут быть следующие: дезинформирование противника на войне; действие болезнетворных бактерий и вредителей в сельском хозяйстве; нарушители закона и правопорядка; противники в спортивных играх и т.п. Противодействие приводит к необходимости принимать решение в конфликтной ситуации (конфликты между заказчиком и исполнителем, грузоотправителем и грузополучателем, т.е. в случаях, когда интересы различных сторон не совпадают) [**5**, с.28].

Неопределённость в принятии решений обусловлена **недостаточной надежностью** и количеством **информации**, необходимой ОПР для выбора решения [**1**, с.8].

Известны следующие семь **видов** *неопределённости* [**1**, с.8] (часто встречающиеся):

1) **принципиальная** неопределённость (например, в известных ситуациях квантовой механики);

2) неопределённость, **генерируемая** общим числом объектов или элементов, включённых в ситуацию (например, при числе элементов порядка большего, чем 10^9);

3) неопределённость из-за **недостатка** информации и её **достоверности** в силу технических, социальных или иных причин;

4) неопределённость, порождённая слишком высокой или НЕдоступной **платой** за определённость;

5) неопределённость, порождённая ОПР в силу НЕдостатка его **опыта** и **знаний** факторов, влияющих на принятие решений;

6) неопределённость, связанная с **ограничениями** в ситуации принятия решений (ограничения по *времени* и *элементам* пространства параметров, характеризующих факторы принятия решения);

7) неопределённость, вызванная поведением **среды** или **противника**, влияющего на процесс принятия решения.

Специалисты выявили [**1**, с.9], что в процессе принятия решения имеют место ситуации, обладающие той или иной степенью неопределённости, для описания которых нужен соответствующий математический аппарат, чтобы получить необходимое решение.

Так сложилось [**1**, с.9], что исторически первым аппаратом была *теория вероятностей* (в ней неопределённость описывалась некоторой нормированной мерой, характеризующей возможность появления *случайных событий* (исходов)).

Следующим аппаратом стали [**1**, с.9] *теория игр* (в которой неопределённость порождалась конфликтом и антогонистическими интересами игроков, связанными между собой правилами игры) и *теория статистических решений* (в которой в качестве одного из игроков выбиралась *пассивная среда* или "ПРИРОДА", поведение которой характеризовалось заданными *законами распределения вероятностей*). Эти две теории можно считать крайними случаями неопределённости.

Ещё [**1**, с.9] один класс неопределённости охватывают методы *аппарата расплывчатых (размытых) множеств Л.Заде* (этот аппарат позволяет описывать ситуации, которые не имеют строго определённых границ).

Проблема выбора решения в условиях неопределённости (см. работу [**2**, с.29-42]). На практике в реальных задачах показатель эффективности W обычно зависит от трех групп факторов (см. работу [**2**, с.29-30]) $\boldsymbol{U}$, d, ξ, или:

$$W=W(\boldsymbol{U}, d, \xi),$$

где ξ — неизвестные факторы.

Понятно, что поскольку показатель W зависит от ξ, то он не может быть вычислен (т.е. остается *неопределённым*), а сама задача поиска оптимального решения теряет определённость.

Однако постановка задачи может быть всё-таки сделана следующим образом [**2**, с.30]:

При заданных условиях $\boldsymbol{U}$*, с учётом неизвестных факторов* ξ*, найти такое решение* $d \in D$*, которое,* ***по возможности****, обеспечивает максимальное (минимальное) значение показателя эффективности* W*.*

Присутствие этих самых неопределённых факторов ξ придает задаче **новое качество**: она стала задачей о выборе решения в условиях неопределённости [**2**, с.30].

Неопределённость 1 (стохастическая или хорошая)

На практике выделяют случай (см. работу [**2**, с.31-32]), когда неизвестные факторы $\boldsymbol{\xi}$ являются обычными объектами изучения в *теории вероятностей* — *случайными величинами* (случайными функциями), статистические характеристики которых известны или в принципе могут быть получены. В ИО такая неопределённость называется **стохастической**.

Имеются некоторые способы действия в этой неопределённости [**2**, с.31-37].

Способ 1 ("**оптимизация в среднем**"). Полагают, что так как $\boldsymbol{\xi}$ — это случайные величины, то и значения показателя эффективности W также случайные величины. Тогда идея состоит в том, чтобы в качестве показателя эффективности выбрать среднее значение (т.е. математическое ожидание) показателя эффективности W: $\bar{W} = M\left[W\right]$ — и выбрать такое решение $d \in D$, при котором этот усредненный по условиям показатель обращается в максимум (или минимум):

$$\bar{W} = M\left[W\left(\boldsymbol{U}, d, \boldsymbol{\xi}\right)\right] \to \max.$$

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.34-35]. Для оптимизации в среднем необходимо, чтобы операция обладала свойством повторяемости, и недостача показателя в одном случае компенсировалась его "избытком" в другом случае. Есть случаи, когда это не так, например, время ожидания врача отдельным больным не суммируется: слишком долгое ожидание одного из них не компенсируется почти мгновенным обслуживанием другого.

Способ 2 (**стохастические ограничения**). В основе лежит **способ 1**, но вводятся дополнительно *стохастические* ограничения, например, следующего вида: $\boldsymbol{P}(W \le W_{\text{здн}}) \ge \boldsymbol{\beta}$, где вероятность $\boldsymbol{\beta}$ назначается близкой к **1** (т.е. практически достоверное событие), а $W_{\text{здн}}$ — это заданное значение показателя эффективности. Тогда это стохастическое ограничение означает следующее: вероятность $\boldsymbol{P}(W \le W_{\text{здн}})$ того, что значение показателя эффективности W будет не больше, чем заданное $W_{здн}$ (например, в ТЗ на техническую систему) не меньше чем $\boldsymbol{\beta}$ (например, 0.99).

На практике, наличие в задачах оптимизации стохастических ограничений, как полагают специалисты, **сильно усложняет** задачу оптимизации [**2**, с.35].

<u>Неопределённость 2 (НЕстохастическая, или плохая (условно называемая «дурная»))</u>

На практике выделяют другой случай (см. работу [**2**, с.38]), когда неизвестные факторы ξ не являются <u>обычными</u> объектами изучения в *теории вероятностей* — *случайными величинами* (случайными функциями). Не имеет смысла говорить об их "законах распределения" или других вероятностных характеристиках.

Разумно в этом случае выбрать [**2**, с.38-39] не решение $\boldsymbol{x}$, оптимальное для каких-то условий ξ, а некоторое **компромиссное** решение — неоптимальное **ни для каких условий**, но всё же **приемлемое** в целом их диапазоне.

В настоящее время **отсутствует** полноценная научная теория компромисса, однако имеются попытки в этом направлении в виде теории *игр* и теории *статистических решений*. На практике окончательный выбор **компромиссных** решений выполняется человеком, т.е. *лицом, принимающим решение* (ЛПР). Это ЛПР, основываясь на предварительных расчетах (получаемых при решении прямых задач ИО для разных условий ξ и разных вариантах решений $\boldsymbol{x}$), может оценить сильные и слабые стороны по каждому варианту и на этой основе сделать окончательный выбор [**2**, с.39].

<u>Имеются некоторые способы действия в этой неопределённости</u> [**2**, с.39-42].

Способ 1. Надо заранее исключить те решения $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, которые при любых условиях <u>уступают</u> другим решениям.

Способ 2. Вести расчет <u>на худший случай</u> и принимать те решения, которые дают <u>максимальный</u> эффект в наихудших случаях (реализовывая принцип гарантированного результата).

Способ 3. Вести расчет с помощью метода <u>экспертных оценок.</u> Идея этого метода состоит в следующем: отбираются компетентные специалисты (т.е. эксперты) в заданной области; каждому из экспертов требуется дать ответ (принять решение) на поставленный вопрос; полученные мнения (решения) экспертов обрабатываются соответствующими методами.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.40]. Любое решение, принятое в условиях **плохой (дурной)** неопределённости — это неизбежно ПЛОХОЕ решение, и, как правило, не стоит его обосновывать с помощью "тонких" и тщательных (кропотливых) расчетов. Разумно лучше подумать о том, откуда можно получить недостающую информацию.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.41-42]. В условиях **плохой (дурной)** неопределённости НЕЛЬЗЯ (не разумно) предъявлять к точности решения слишком высокие требования. Например, не следует искать <u>одно-единственное</u> (в точности "оптимальное" с какой-то точки зрения) решение, а лучше (и разумнее) выделить некоторую область D "приемлемых" решений, которые оказываются <u>не существенно хуже</u> других решений. Окончательное решение должен сделать человек (ЛПР), анализируя решения именно из этой области D.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.42]. Исследователь, предлагающий рекомендации по выбору решения, всегда должен одновременно с этим указывать <u>точки зрения</u>, из которых вытекают те или другие рекомендации.

На практике бывает так, что сложную детерминированную задачу (для точного решения которой требуется слишком большой объём вычислений) целесообразно привести к **вероятностному** виду (хотя вся информация известна). Этот приём называется *стохастическое расширение детерминированной задачи*. Объём вычислений при этом существенно сокращается. Образно говоря, модель как бы рассматривается издалека: детали исчезают, но зато общая структура задачи становится более ясной, обозримой [**4**, с.392].

Хорошо известно, что [**4**, с.411] <u>математические задачи</u> в рамках *теории принятия решений* четко разделяются на **три** направления:

1) ***детерминированные*** *задачи* (когда полагают, что каждое действие (альтернативная стратегия) приведет к единственному результату, который известен **заранее**);

2) ***вероятностные*** *задачи* (иногда их называют задачами в условиях **риска**) (когда могут быть получены разные результаты, причём они заранее известны или может быть оценена вероятность их достижения);

3) ***НЕопределённые*** *задачи* (когда полагают, что заранее **не** известно, какие результаты реальны, хотя обычно известно представление о пределах области значений, в которых они находятся (на практике, если это возможно, применяют адаптивные стратегии, использующие ту информацию, которая поступает в процессе решения)).

Для каждого направления задач применяют свои **критерии** эффективности. Так (см. [**4**, с.57, 96, 248]) для

- ***детерминированных*** *задач* критерии: *полезность* (т.е. лучший результат);

- ***вероятностных*** *задач* критерии: *математическое ожидание полезности*; *пороговая оптимизация* и др.;

- ***НЕопределённых*** *задач* критерии: *максимин* (*минимакс*); *обобщенный максимин*; *минимаксные потери*; *Байеса* (*Лапласа*);

Показатель (критерий) эффективности операции [**29**]

Для того чтобы сравнивать между собой по эффективности разные решения, нужно иметь (см. и ср. [**2**, с. 17]) какой-то количественный *критерий* или, так называемый, *показатель эффективности* (часто называемый *целевой функцией*). На практике, как полагают специалисты [**2**, с. 18], неправильный выбор показателя эффективности очень опасен.

Определение 1.1

Критерий эффективности (КЭ) [**28**, с. 170] — правило или способ принятия решения с учётом эффективности системы.

Определение 1.2

Эффективность [**28**, с. 59] — это наиболее общее, определяющее свойство любой целенаправленной деятельности, которое с познавательной (гносеологической) точки зрения раскрывается через категорию *цели* и объективно выражается степенью достижения цели с учётом затрат ресурсов и времени.

Определение 1.3

Эффективность операции (ЭО) [**28**, с.21, 60, 179] — степень соответствия реального (фактического или ожидаемого) результата операции требуемому (желаемому), или, иными словами, степень достижения цели операции.

Отметим следующее. Под ЭО понимается (см. [**27**, с.12]) степень её приспособленности к выполнению стоящей перед ней задачи (чем лучше организована операция, тем она эффективнее).

Специалисты полагают, что понятие эффективности относят, как правило, к операции. Однако *техническая система* (ТС) в самой операции выступает как активное средство достижения цели, и тогда *эффективность операции* отождествляется с *эффективностью* ТС [**28**, с.21]. Понятие эффективности есть фундаментальное понятие теории эффективности [**28**, с.59].

Определение 1.4

Техническая эффективность [**28**, с. 177] — степень приспособленности системы к выполнению задачи, обусловленная техническими *параметрами* и надежностью её элементов.

Определение 1.5

Параметр системы [**28**, с. 181] — показатель, количественно определяющийся свойствами элементов той физической системы, в которой происходит моделирующий процесс.

Специалисты полагают, что на практике при исследовании *эффективности* исследователи, как правило, сталкиваются со следующими двумя проблемами [**28**, с. 21]:

- ♦ проблема оценки эффективности;
- ♦ проблема выбора рационального способа действий (выбора стратегий).

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**28**, с.21]. Оценка эффективности предполагает формулировку *цели операции* (т.е. требуемого результата), а также выбор и обоснование *показателя эффективности*, вычисления значения выбранного показателя.

<u>Определение 1.6</u>

Показатель эффективности (ПЭ) (см. и ср. [**28**, с. 21, 40]) — показатель, количественно выражающий (измеряющий) степень соответствия реального результата операции требуемому (ПЭ — это мера удовлетворения потребности).

Специалисты полагают, что *показатель эффективности* должен отражать имеющуюся информацию об объективной полезности принимаемых решений, оценивать целесообразность наших действий с позиций более высокого уровня рассмотрения исследуемой системы [**28**, с.39].

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**28**, с. 62]. Формирование *показателя эффективности* — это важный этап исследования ЭО. Этот этап является сложной и многошаговой итеративной процедурой. Причём сама эта процедура не может быть полностью формализована.

<u>Определение 1.7</u>

Показатель [**28**, с. 173] — количественная характеристика какого-либо свойства системы или целенаправленного процесса, являющаяся результатом измерения или расчета.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**28**, с. 64]. Исследование эффективности операции выполняется всегда с точки зрения интересов основного субъекта операции, которого называют ЛПР.

Некоторые специалисты именно *критериями* называют такие показатели, которые [**42**, с. 11]:

- **характеризуют** общую ценность решения таким образом, что у ЛПР имеется стремление получить по ним наиболее предпочтительные оценки (т.е. они не могут быть представлены в виде ограничений);

- **признаются** ЛПР в качестве характеристик степени достижения подцелей поставленной цели;

- **являются** общими и измеримыми для всех допустимых решений.

Отметим следующее. С каждым критерием связана некоторая *шкала*. Шкала — множество упорядоченных оценок. На практике эти шкалы могут быть как *нечисловыми*, так и *числовыми*. Среди числовых шкал выделяют *непрерывные* и *дискретные* шкалы. Иными терминами для обозначения критериев могут быть *локальные критерии*, *показатели*, *целевые функции*, *факторы*, *показатели качества* и другие термины.

В ТПР принято, что ЛПР на практике обладает *системой предпочтений*. ЛПР, опираясь на свою *систему предпочтений,* выполняет свои рациональные действия. Специалисты под *системой предпочтений* ЛПР понимают некоторое *множество*, как правило, не структурированных **представлений** ЛПР. Это множество представлений обычно не полно и связано с опытом ЛПР и с его общей стратегией. Сами же предпочтения ЛПР формируются, как правило, в процессе специального исследования, связанного с построением модели [**42**, с.12].

В данной работе будем придерживаться несколько иной трактовки этих важных терминов и иного самого набора терминов. Будем говорить о *показателях эффективности* технической системы и о критерии (критериях) *эффективности* технической системы.

Предполагается, что у технической системы есть некоторый набор (как правило, не пустое множество) варьируемых параметров и заданных параметров.

Далее будем полагать [**29**], что эффективность ТС оценивается с помощью одного единственного ПЭ или с помощью нескольких ПЭ, причём с ПЭ связано правило или способ принятия решения с учётом эффективности системы. Это правило и будем называть критерием эффективности. Обычно на практике, имея ПЭ, можно сформулировать и сам КЭ. Саму ТС можно оценивать по набору показателей, некоторые из которых являются варьируемыми параметрами или заданными параметрами.

Кратко рассмотрим проблему выбора ПЭ. Оценивать эффективность можно как отдельной операции, так и всей ТС. На практике реальная техническая система может быть представлена только одной операцией или совокупностью из целого ряда операций, которые выполняются в ТС.

Для того чтобы можно было судить об *эффективности* ТС (ЭТС) и сравнивать различные варианты, необходимо ввести совокупность показателей эффективности и сформулировать критерии (или критерий) ЭТС. Обычно для каждого класса ТС применяют свои ПЭ, с учётом специфики и *целевого назначения* (ЦН) ТС.

Опираясь на работы [**2**, **21**-**26** и др.], сформулируем требования к ПЭ технической системы, который **должен** [**29**]:

1) быть достаточно простым [**23**, **25**], понятным [**25**, с. 185] и обозримым;
2) иметь ясный и однозначный физический смысл [**21**, с.106];
3) быть чувствительным к варьируемым параметрам [**23**], значение которых необходимо определить для повышения ЭТС;
4) соответствовать реальному процессу работы системы;
5) допускать его оценку по экспериментальным данным [**21**, с. 106] и с помощью моделирования (по возможности, статистические оценки должны быть *состоятельными* [**24**, с.186; **26**, с. 452], *несмещёнными* [**26**, с. 452] и *эффективными* [**24**, с. 187-189; **26**, с. 453]).

Практика показала следующее. Для того чтобы ПЭ удовлетворяли перечисленным выше требованиям, необходимо [**29**]:

1) разработать ПЭ так, чтобы они непосредственно отражали специфику системы и соответствовали её ЦН;

2) выделить в составе ПЭ варьируемые параметры и выполнить с их помощью исследования ЭТС;

3) проверить адекватность модели ТС, которая используется для оценки ТС по выбранным ПЭ;

4) создать средства ускоренной оценки (при заданной точности) ПЭ, требующих чрезмерных затрат для их вычисления.

Известно, что подходящие, удачно выбранные ПЭ позволяют оценить качество системы с точки зрения её эффективности и сравнить её варианты по каждому из них.

Наличие единого показателя, являющегося сверткой таких ПЭ, значительно облегчает разработчику выбор лучшего варианта системы, обеспечивающего большую эффективность. При этом состав набора таких ПЭ непосредственно вытекает (следует) из особенностей (специфики) систем и требований к ней (оперативность, способность правильно отвечать на запросы, небольшие затраты и т.п.).

Использовать один-единый и всеобъемлющий показатель эффективности, учитывающий хотя бы основное многообразие требований пользователей и разработчиков систем, как показал опыт разработки реальных *автоматизированных фактографических информационно-поисковых систем* (АФИПС), **не всегда** удаётся.

На практике необходимо учитывать то обстоятельство, что имеются квантовые объекты (см. [**30**, **31**, **32**] и др.), которые вносят свою специфику в процесс принятия решения. В работах [**6-13**, **15-17**] читатель может познакомиться с другими необходимыми и интересными сведениями, связанными с принятием решений, на которых в данной работе останавливаться не будем.

1.2. Принятие решений в условиях неопределённости

На практике важно уметь видеть принципиальное различие между *стохастическими факторами* (СФ), приводящими к принятию решения в **условиях риска**, и *неопределёнными факторами* (НФ), приводящими к принятию решения в *условиях неопределённости*. Как СФ, так и НФ приводят к некоторому разбросу возможных исходов результатов принятия решения. Однако именно *стохастические факторы* хорошо описываются известными статистическими характеристиками, значения которых известны ЛПР или в принципе могут быть им получены (эта возможность и позволяет выбрать *лучшее в среднем решение* (**оптимизация в среднем**)). Для НФ подобные сведения о "статистических характеристиках" у ЛПР отсутствуют.

РИСК — это "*плата за отсутствие информации*" [**2**, с.198].

Выше (ранее) было отмечено, что **неопределённость** может быть вызвана:

- либо **противодействием** разумного противника (область исследования теории игр);
- либо **недостаточной** осведомлённостью ЛПР об условиях осуществления самого выбора решения ("**игра с природой**").

На практике **выбор** того или иного критерия, как правило, неформализуем и осуществляется ЛПР, субъективно, исходя из его знаний, опыта, интуиции, должностных инструкций, рекомендаций и т.п.

В любых задачах принятия решений **некоторый** произвол **неизбежен** (например, при построении математической модели или при выборе критерия (показателя) эффективности) [**2**, с.202].

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Имеются различные математические методы для выбора и обоснования решений. Однако (см. [**2**, с.206]), "главное — ни один из этих методов не избавляет человека от необходимости *думать*"!

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.201]. Не следует ждать от теории решений окончательных, непререкаемых **рекомендаций**! Единственное, чем эта теория может помочь, так это советом!

В терминах "**игры с природой**" задача принятия решений может быть сформулирована так. Пусть ЛПР (т.е. мы) может выбрать один из $\boldsymbol{m}$ возможных вариантов своих решений (стратегий) $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2},\ldots, \boldsymbol{A_i},\ldots, \boldsymbol{A_m}$, и пусть относительно **условий**, в которых будут реализованы возможные варианты, можно сделать $\boldsymbol{n}$ предположений $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2},\ldots, \mathbf{П}_{\boldsymbol{j}},\ldots, \mathbf{П}_{\boldsymbol{n}}$. Оценки каждого варианта решения в каждых условиях ($\boldsymbol{A_i}$, $\mathbf{П}_{\boldsymbol{j}}$) известны и заданы в виде матрицы **выигрышей** ЛПР $|\boldsymbol{a_{ij}}|$.

Как известно [**2**, с.200], *теория статистических решений* (ТСР) предоставляет ЛПР несколько критериев оптимального (в некотором смысле) выбора решений. Кратко рассмотрим эти критерии (см. работу [**2**, с.200-201]).

Максиминный критерий Вальда (см. работу [**2**, с.200])

Предполагается, что игра с природой ведётся как игра с разумным (и агрессивным) противником, пытающимся помешать нам (т.е. ЛПР) достичь успеха. В соответствии с этим критерием **оптимальное** решение выбирается из следующего условия:

$$\boldsymbol{V} = \max_{1\le i\le m}\left\{\min_{1\le j\le n} a_{ij}\right\} = a_{i^* j^*}.$$

В каждой **строке** матрицы $|\boldsymbol{a_{ij}}|$ выбирается минимальная оценка. Оптимальному решению соответствует такое решение (стратегия $\boldsymbol{A_i}$ при $\boldsymbol{i}$=$\boldsymbol{i^*}$), которому соответствует максимум этого минимума (т.е. $a_{i^* j^*}$). Этот критерий **очень осторожен**, так как ориентирован на **наихудшие** условия (среди которых отыскивается наилучший и гарантированный результат).

В этом случае **оптимальным** считается решение (стратегия), при котором гарантируется **выигрыш** в любом случае не меньший, чем *нижняя цена игры с природой* [**2**, с.200].

Критерий минимаксного риска Сэвиджа (см. работу [**2**, с.200])
Данный критерий является пессимистическим. Выбор *оптимального решения* ориентируется на риск, а не на выигрыш. В соответствии с этим критерием оптимальное решение выбирается из следующего условия:

$$S = \min_{1 \le j \le n} \left\{ \max_{1 \le i \le m} r_{ij} \right\},$$

где

$$r_{ij} = \max_{1 \le k \le m} \left\{ a_{kj} \right\} - a_{ij}.$$

Основная идея сущности оптимизации состоит в том, чтобы всячески избегать большого **риска**.

Риском $\boldsymbol{r_{ij}}$ игрока $\boldsymbol{A}$ при пользовании стратегией $\boldsymbol{A_i}$ в условиях $\mathbf{П}_j$ называется разность между выигрышем, который можно получить, если знать условия $\mathbf{П}_j$, и выигрышем, который мы получим, не зная условия $\mathbf{П}_j$ и выбирая стратегию $\boldsymbol{A_i}$ [**2**, с.197-198]. Отметим следующее. Основная идея сущности такой оптимизации состоит в том, чтобы выбрать такое решение, при котором величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации. Для этого в каждом **столбце** матрицы

$$|\boldsymbol{a_{ij}}|$$

находят максимальную оценку и составляют новую матрицу

$$|\boldsymbol{r_{ij}}|,$$

элементы которой определяются соотношением:

$$r_{ij} = \max_{1 \le k \le m} \left\{ a_{kj} \right\} - a_{ij}.$$

Эту новую матрицу называют **матрицей рисков** (или **потерь** [**4**, с.219]).

Далее уже из этой матрицы выбирают такое решение $\boldsymbol{A_i}$, при котором величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной (т.е. когда максимален риск) ситуации.

<u>Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица</u> (см. [**2**, с.200])
В соответствии с этим критерием **оптимальное** решение выбирается из следующего условия:

$$\boldsymbol{H} = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \chi \cdot \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\chi) \cdot \max_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\},$$

где $\boldsymbol{\chi}$ — это коэффициент **пессимизма** (иногда вводят коэффициент **оптимизма**), причём $0 \le \boldsymbol{\chi} \le 1$.

При $\boldsymbol{\chi}=1$ критерий Гурвица преобразуется в критерий Вальда (случай "**крайнего пессимизма**"). При $\boldsymbol{\chi}=0$ — в критерий "**крайнего оптимизма**" (азартного игрока). При $0<\boldsymbol{\chi}<1$ имеем что-то среднее между ними. Значение коэффициента $\boldsymbol{\chi}$ назначается <u>субъективно</u>, опираясь на опыт и интуицию ЛПР (для более опасной ситуации подход к выбору решения должен быть **осторожнее**, т.е. наша склонность к риску есть меньше, и тем меньшее значение присваивается нами (т.е. ЛПР) этому коэффициенту $\boldsymbol{\chi}$). По <u>аналогии</u> можно построить критерий, опираясь не на выигрыш, а на риск [**2**, с.201].

<u>Критерий Байеса</u> **<u>(Лапласа)</u>** (см. работу [**4**, с.40])
В соответствии с этим критерием **оптимальное** решение выбирается из следующего условия:

$$\boldsymbol{L} = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}.$$

Здесь предполагается, что отсутствует априорная информация о вероятностях возникновения $\boldsymbol{j}$-й ситуации $\boldsymbol{\Pi}_j$.

Основная идея сущности такой оптимизации состоит в том, чтобы вероятности возникновения той или иной ситуации $\boldsymbol{\Pi}_j$ полагать **равновероятными**, поскольку они не известны. Затем для каждой **строки** матрицы $|\boldsymbol{a}_{ij}|$ выигрышей подсчитывается среднее арифметическое значение оценок. Оптимальному решению будет соответствовать то, которому соответствует **максимальное** значение этого среднего арифметического.

ВАЖНО ПОМНИТЬ. На практике применяют ещё и другие критерии. Универсальных рекомендаций по выбору критерия, по-видимому, нет.

Укажем следующие некоторые рекомендации:

- критерий Вальда разумно применять, если не допустим даже минимальный риск;
- критерий Сэвиджа разумно применять, если определённый риск вполне приемлем;
- разумно (см. [**2**, с.201]) применять поочередно разные критерии, и среди нескольких вариантов, отобранных этими критериями в качестве оптимальных, затем уже **волевым** решением приходится выделять окончательное решение.

Однокритериальные и многокритериальные задачи принятия решений

Задачи, в которых эффективность **операции** (технической системы) оценивается только по одному критерию принято называть *однокритериальными задачами* (ОКЗ). Соответственно задачи, в которых эффективность **операции** (технической системы) оценивается по многим критериям, принято называть *многокритериальными задачами* (МКЗ). На практике часто при формулировке цели операции ЛПР не удаётся остановить свой выбор только на одном критерии эффективности (известно, что методы выбора **решений** на основе компромисса являются базовой основой "векторной" или "многокритериальной" оптимизации).

Практика разработки технических систем показала, что иногда удаётся представить эффективность системы только одним основным показателем (критерием) эффективности, например в случае создания ракеты, самолета (или надводного корабля) с **максимальной** скоростью полета (хода) с целью установления мирового рекорда по скорости передвижения, или другой пример: создание самого быстродействующего вычислительно устройства и т.п. В случае только одного критерия решается обычная задача **оптимизации** по этому критерию путём применения одного из методов *математического программирования,* например, *геометрического программирования*.

Поиски средств формализации МКЗ — очень важная и развивающаяся область исследований.

Если описание цели системой критериев есть неформальная процедура, то последующее *агрегирование* критериев также есть неформальная процедура. Поэтому решение многокритериальной задачи не является строгой математической задачей (так как это есть набор процедур, помогающих ЛПР *разобраться* и *уточнить* цель принятия решений, *устранить* ошибки в своих оценках, сделать свое поведение в процессе выбора рациональным) [**3**, с.6].

Все МКЗ по виду требуемого результата можно разделить на следующие **четыре** класса [**3**, с.8]:

1) задачи, в которых необходимо выделить из множества объектов **один** наиболее **предпочтительный** объект (наиболее **предпочтительное** решение); иногда может быть выделено не одно, а **подмножество эквивалентных** и наиболее **предпочтительных** решений (объектов);
2) задачи, в которых необходимо упорядочить заданное множество объектов (решений);
3) задачи, в которых необходимо дать оценку **полезности** (качества) объектов (решений) по шкале интервалов (т.е. необходимо построить **функцию полезности**);
4) задачи, в которых необходимо выделить из множества решений (объектов) подмножество **эффективных** (конкурирующих) решений (объектов); такие подмножества называют *оптимальными по Парето*.

Известно способы решения многокритериальных **задач** (см. работы [**4**, с.221]):

1) **оптимизация одного критерия**, (почему-либо) признанного наиболее важным; остальные при этом играют роль дополнительных ограничений;
2) **упорядочение** заданного множества критериев и последовательная **оптимизация** по каждому из них;
3) **сведение многих критериев** к одному путём введения априорных (экспертных) весовых коэффициентов для каждого из критериев (более важный критерий получает более высокий вес).

Метод решения МКЗ оптимизации с использованием обобщенного (интегрального) критерия [**20**]

Основная идея этого метода состоит в том, что *частные критерии* (ЧК) каким-либо образом объединяются в один интегральный критерий, а затем уже находится максимум или минимум данного обобщенного критерия.

Если объединение ЧК выполняют исходя из объективной взаимосвязи ЧК и критерия обобщенного, то тогда оптимальное решение будет корректно, но такое объединение осуществить крайне сложно или невозможно, поэтому, как правило, обобщенный критерий есть результат чисто формального объединения ЧК [**20**].

В зависимости от того, каким образом ЧК объединяются в интегральный критерий, различают следующие виды обобщенных критериев [**20**]:

- **аддитивный** критерий [**2**, с.45];
- **мультипликативный** критерий (например, в виде дроби [**2**, с.44]);
- **максиминный** (минимаксный) критерий.

Отметим следующее [**20**]. Выбор критериев — сложная задача (а неправильный выбор даже опасен [**2**, с.18]), поскольку цели при создании **технической системы** обычно *противоречивы* (разработчику, например, для АФИПС необходимо обеспечить *минимальную стоимость* и *максимальную надежность*, *максимальную точность поиска* и *минимальное время поиска* и т.п.).

Аддитивный критерий (**АдК**) [**2**, с.45; **20**]

В них целевая функция получается путём сложения нормированных значений частных критериев. В общем виде целевая функция имеет следующий вид [**20**]:

$$F\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{C_i\cdot\frac{F_i\left(X\right)}{F_i^0\left(X\right)}\right\}=\sum_{i=1}^{n}\left\{C_i\cdot f_i\left(X\right)\right\}\to\max\quad\left(\textit{или}\min\right),$$

где $\boldsymbol{C_i}$ — весовой коэффициент $\boldsymbol{i}$-го *частного критерия*; $\boldsymbol{F_i}(X)$ — числовое значение $\boldsymbol{i}$-го ЧК;

n — количество объединяемых ЧК; $\boldsymbol{F^0_i}\,(X)$ — $\boldsymbol{i}$–й нормирующий делитель; $\boldsymbol{f_i}\,(X)$ — нормированное значение $\boldsymbol{i}$–го ЧК.

Отметим следующее [**20**]. ЧК имеют различную физическую природу и поэтому различную размерность — значит просто суммировать их некорректно. В связи с этим в формуле для **АдК** числовые значения ЧК делятся на некоторые *нормирующие делители* (НД), которые назначаются следующим образом [**20**]:

- в качестве НД принимаются директивные значения параметров (критериев), заданные заказчиком; полагают, что значения параметров, заложенные в ТЗ, являются оптимальными или наилучшими;
- в качестве НД принимаются **максимальные** (минимальные) ЧК, достигаемые в области допустимых решений.

Размерности самих ЧК и соответствующих нормирующих делителей одинаковы, поэтому в итоге обобщенный аддитивный критерий получается безразмерной величиной [**20**].

Преимущество АдК [**20**]. Как правило, всегда удаётся определить единственный оптимальный вариант решения.
Недостатки АдК [**20**]:

- есть трудности (так как субъективизм) в определении весовых коэффициентов;
- **АдК** не вытекает из объектной роли частных критериев и поэтому выступает как формальный математический прием;
- в **АдК** происходит взаимная компенсация значений частных критериев (т.е. уменьшение одного из них может быть компенсировано увеличением другого критерия).

Мультипликативный критерий (**МпК**) [**2**, с.44-45; **20** и др.]
Целевая функция (т.е. **МпК**) в этом случае может быть представлена, например, следующим образом (см. и ср. с [**20**]):

$$F(X)=\prod_{i=1}^{n}\left\{F_i(X)\right\}^{C_i}\to\max\ (\textit{или}\ \min),$$

где $\boldsymbol{C_i}$ — степенной коэффициент $\boldsymbol{i}$-го частного критерия; $\boldsymbol{F_i}\,(X)$ — числовое значение $\boldsymbol{i}$-го ЧК.

Преимущества МпК [20]:

- не требуется нормировка частных критериев;
- практически всегда выявляется одно оптимальное решение.

Недостатки МпК [20]:

- есть трудности (так как есть субъективизм) в определении весовых коэффициентов;
- в **МпК** выполняется перемножение разных размерностей;
- в **МпК** происходит взаимная компенсация значений частных критериев (т.е. уменьшение одного из них может быть компенсировано увеличением другого критерия).

<u>Нейросетевой критерий</u> (НсК) [33]

В данном случае предлагается обобщенный критерий $Y_{\mathbf{НсК}}$, который получается путём построения подходящей *нейронной сети* (НС) по обучающей выборке экспертных решений. В процессе обучения нейронной сети определяются все её параметры (ω_i — весовые коэффициенты). Затем выявляется формула, показывающая, как зависит выход $Y_{\mathbf{НсК}}$ нейронной сети от её входа. Целевая функция может иметь следующий вид:

$$Y_{\mathbf{НсК}}\left(X\right)=F\left(W, X, f_i\left(X\right), n\right) \quad \to \quad \underset{X\in D}{\text{extremum}},$$

где ω_i — весовой коэффициент $\boldsymbol{i}$-го частного критерия; $W=(\omega_1, ..., \omega_i, ..., \omega_d)$; $f_{\boldsymbol{i}}(X)$ — числовое значение $\boldsymbol{i}$-го частного критерия (возможно модифицированного); n — количество объединяемых ЧК; $X=(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ — переменные (параметры), от которых зависит значение критерия (показателя); D — область допустимых значений варьируемых параметров (переменных). Для **НсК** укажем некоторые основные недостатки и преимущества.

Преимущества **НсК**:

- практически всегда выявляется оптимальное решение;
- можно оценить качество (точность) **НсК** на контрольной выборке;
- выборки можно генерировать.

Недостатки **НсК**:

- необходимо наличие <u>обучающей</u> выборки для определения параметров сети (весовых коэффициентов);
- необходимо наличие <u>контрольной</u> выборки для оценки качества нейронной сети (**НсК**);
- обучение НС может потребовать значительных ресурсов;
- могут быть трудности в установлении формулы для **НсК**;
- НС может на практике работать не идеально (есть ошибки НС из-за ограниченности обучающей выборки).

Отметим, что пороговый элемент — это типичный фрагмент НС. Применяя ПЭл на выходе НС, становится возможным выполнение классификации входных объектов (возможных вариантов ТС, предлагаемых исполнителем с конкретным значением $Y_{\mathbf{НсК}}$), например, в простейшем случае на два класса. Этот ПЭл выполняет как бы роль фильтра, разделяющего входные объекты на эффективные (т.е. те, что могут быть приняты ЛПР) и не эффективные (т.е. те, что не могут быть приняты ЛПР). Применение **АдК** или **МпК** в принципе не позволяет реализовать ничего подобного. ПЭл может быть применён только для линейно разделимых классов вариантов ТС. На практике возможны более широкие постановки задач при использовании НС другой архитектуры (например, многослойного персептрона).

Упрощённая нейронная сеть для НсК [**33**]

Рассмотрим простой (гипотетический) пример (рис. 1.1, 1.2) построения **НсК** для некоторой технической системы, характеризующейся только шестью показателями (критериями). Приняты обозначения: $s_1 = f_1\left(X\right)$, $s_2 = f_2\left(X\right)$, $s_3 = f_3\left(X\right)$, $s_4 = f_4\left(X\right)$ — для стоимостных показателей и $t_1 = f_5\left(X\right)$, $t_2 = f_6\left(X\right)$ — для временных показателей. Обычно на практике стремятся эти показатели уменьшить.

При использовании НС обучаемых, например методом обратного распространения ошибки, становится возможным выявление зависимости (в виде некоторой формулы) выхода нейронной сети от значений показателей (ЧК), которые подаются на её вход.

Таким образом, подавая выход нейронной сети на пороговый элемент, можно получить итоговое решение (заключение) об эффективности технической системы.

Приведём пример простой нейронной сети, иллюстрирующий рассматриваемый подход. На вход этой сети будем подавать значения стоимостных и временных показателей технических систем определённого типа (см. рис. 1.1), а обучение будем проводить методом обратного распространения ошибки.

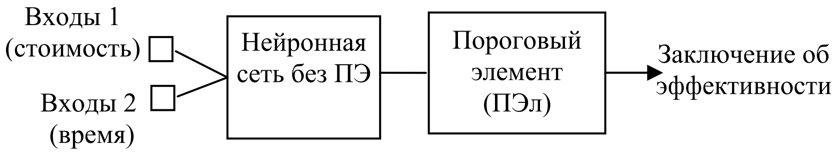


Рис. **1.1.** Схема оценки эффективности по стоимости и времени [**33**]

Для обучения такой сети необходимо иметь выборку стоимостных и временных показателей для набора технических систем, предварительно разделённых (например, заказчиком ТС или экспертами) на два класса: эффективных и неэффективных систем. Причём, чем представительней будет выборка для обучения нейронной сети, тем точнее будет итоговое решение об эффективности технической системы, чьи характеристики поданы на вход обученной сети.

Детализированная схема **НсК** представлена на рис. 1.2. Используемая нейронная сеть имеет один входной слой из двух нейронов, каждый из которых отвечает за свой тип показателей, характеризующих ТС (стоимостные и временные показатели).

Выходной слой нейронной сети состоит из одного нейрона, на вход которого поступают обобщенные взвешенные значения стоимостных и временных показателей.

Выход этого нейрона сравнивается ПЭл с установленным порогом, и принимается итоговое решение об эффективности рассматриваемого варианта технической системы.

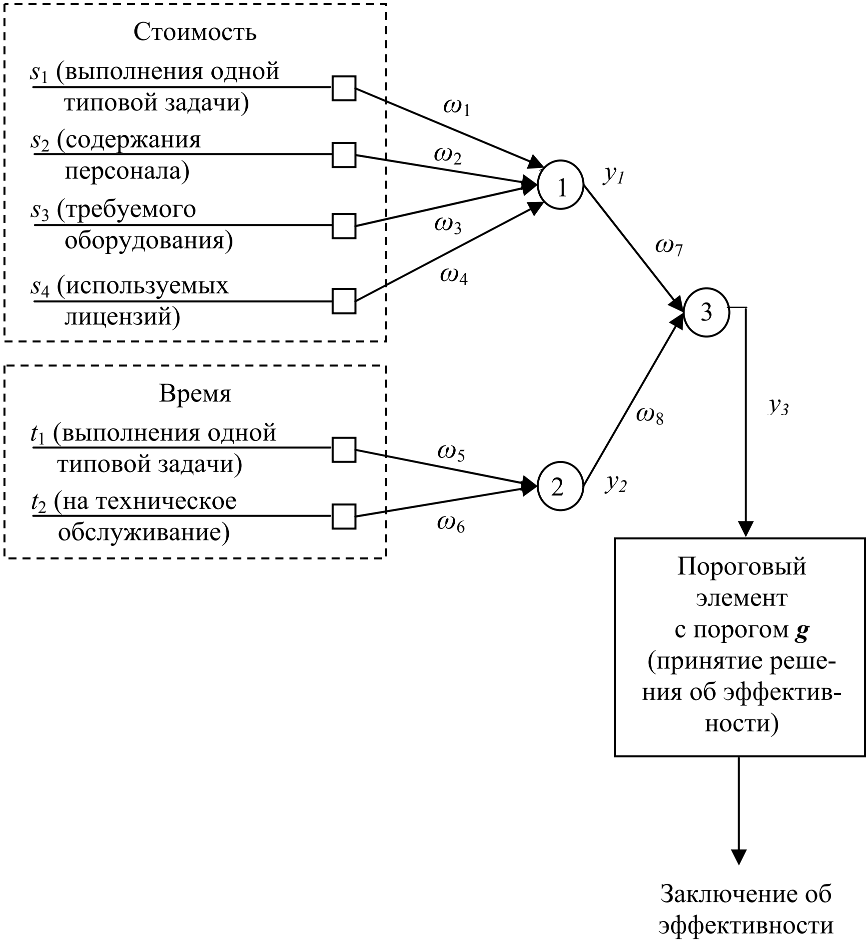


Рис. **1.2.** Уточненная схема оценки эффективности
с использованием нейронной сети и ПЭл [**33**]

Скорость обучения η была принята равной 0.3 . Ожидаемый выход нейронной сети (вместе с ПЭл) d был принят равным 1, если при обучении относительные стоимостные характеристики (показатели) s_1, s_2, s_3, s_4 варианта технической системы были высокими (в среднем больше 1), а относительные временные характеристики t_1, t_2 были малыми (в среднем меньше 0.2). В этом случае было принято полагать, что техническая система является эффективной. В противном случае ожидаемый выход нейронной сети с ПЭл был принят равным 0, т.е. рассматриваемый вариант технической системы полагался неэффективным. Важно отметить, что определение принадлежности варианта ТС к классу эффективных или к классу неэффективных систем для обучающей или контрольной выборки осуществляется человеком, например ЛПР, а главное, может быть сделано, в общем-то, по-разному. В данном случае для демонстрационного примера было выбрано именно такое правило определения эффективности технической системы (в другом случае возможно и другое правило).

Вначале обучения нейронной сети были случайно заданы следующие веса каждой из связей:

$$\omega_1 = 0.1; \quad \omega_2 = -0.15; \quad \omega_3 = 0.05; \quad \omega_4 = -0.2;$$
$$\omega_5 = 0.15; \quad \omega_6 = 0.2; \quad \omega_7 = -0.05; \quad \omega_8 = -0.1 .$$

Далее, используя обучающую выборку, были выполнены корректировки этих весов при помощи следующих формул:

$$\Delta\omega_i = \eta \cdot s_i \cdot y_1 \left(1 - y_1\right) \omega_7 \left(d - y_3\right) y_3 \left(1 - y_3\right), \quad i = 1, \ldots, 4;$$

$$\Delta\omega_j = \eta \cdot t_k \cdot y_2 \left(1 - y_2\right) \omega_8 \left(d - y_3\right) y_3 \left(1 - y_3\right), \quad j = 5, \ldots, 6;$$
$$k = 1, 2;$$

где

$$\eta = 0.3;$$

$$y_1 = \left(1+e^{-(s_1\omega_1+s_2\omega_2+s_3\omega_3+s_4\omega_4)}\right)^{-1};$$

$$y_2 = \left(1+e^{-(t_1\omega_5+t_2\omega_6)}\right)^{-1};$$

$$Ы = -\left(\frac{\omega_7}{1+e^{-(s_1\omega_1+s_2\omega_2+s_3\omega_3+s_4\omega_4)}} + \frac{\omega_8}{1+e^{-(t_1\omega_5+t_2\omega_6)}}\right),$$

$$y_3 = \left(1+e^{Ы}\right)^{-1},$$

а порог $\boldsymbol{g}$ был принят равным 0.5 для ПЭл, т.е. при $y_3 \geq \boldsymbol{g}$ вариант ТС считается эффективным, а иначе — неэффективным.

Отметим, что y_3 является выходом всей схемы, т.е. $Y_{\mathbf{НсК}} = y_3$. После обучения нейронной сети на 900 примерах (вариантах ТС), рассматриваемая сеть стала способной корректно решать задачу определения принадлежности возможного варианта ТС к одному из двух классов. Были получены следующие итоговые значения весов ω_i после обучения нейронной сети:

$$\omega_1 = 0.75;\ \omega_2 = 0.53;\ \omega_3 = 0.74;\ \omega_4 = 0.48;$$
$$\omega_5 = 1.18;\ \omega_6 = 1.24;\ \omega_7 = 2.91;\ \omega_8 = -3.69\ .$$

Таким образом, была получена искомая зависимость выхода нейронной сети от входных параметров:

$$y_3 = \left(1+e^{Q-G}\right)^{-1};$$

$$Q = \frac{3.69}{Ю};\quad Ю = \left\{1+e^{-(1.18t_1+1.24t_2)}\right\};$$

$$G = \frac{2.91}{Я};\quad Я = \left\{1+e^{-(0.75s_1+0.53s_2+0.74s_3+0.48s_4)}\right\}.$$

Подавая значение выхода нейронной сети y_3 на пороговый элемент с порогом ***g***, можно получить итоговое решение об эффективности рассматриваемого варианта системы.

Необходимо отметить следующее. Обучающая выборка для нейронной сети состояла из 700 элементов (вариантов ТС), из них 350 неэффективных вариантов ТС и, соответственно, 350 эффективных вариантов ТС. Впоследствии при проверке на обученной нейронной сети именно на обучающей выборке были получены следующие результаты:

– ошибки вида **1/0** (когда эффективная система принимается за неэффективную) составили четыре ошибки из 350 элементов, т.е. четыре неэффективных варианта ТС были отнесены к классу эффективных систем;
– ошибок вида **0/1** (когда неэффективная система принимается за эффективную) зафиксировано не было.

Таким образом, общая ошибка первого вида составила ≈**1.14** %, тогда как общая ошибка второго вида была равна **0** % на выборке объема 700. После проведения проверки было принято решение о дообучении нейронной сети ещё на 200 элементах, соответственно, по 100 элементов каждого класса. Далее была проведена ещё одна проверка на обучающей выборке объема 900 и проверочной выборке, состоящей из 400 элементов (по 200 элементов каждого класса). В результате этих проверок никаких ошибок на этих двух выборках обнаружено не было.

В случае для **АдК** (в рассматриваемом демонстрационном примере) критерий эффективности может определяться следующим выражением:

$$Y_{\mathbf{АдК}}(x) = \sum_{i=1}^{6} \left\{ \omega_i \cdot f_i(x) \right\} \quad \rightarrow \quad \min_{x \in D},$$

где ω_i — весовой коэффициент ***i***-го частного критерия; $f_i(x)$ — числовое значение ***i***-го частного критерия $s_1 = f_1(x)$, $s_2 = f_2(x)$, $s_3 = f_3(x)$, $s_4 = f_4(x)$ для стоимостных показателей (критериев) и $t_1 = f_5(x)$, $t_2 = f_6(x)$; ***n***=6 — количество объединяемых ЧК; ***m***=1 — количество варьируемых параметров; x — переменная (параметр), от которой зависит значение критерия (показателя); D — область допустимых значений варьируемого параметра (переменной), $D=\{1, 2\}$, т.е. $x \in \{1, 2\}$.

В случае для **АдК** были получены от экспертов (или заказчика) следующие значения весовых коэффициентов:

$$\omega_1 = 0.6;\ \omega_2 = 0.4;\ \omega_3 = 0.3;\ \omega_4 = 0.5;\ \omega_5 = 0.9;\ \omega_6 = 0.8\ .$$

При $x=1$ для **первого** варианта

$$s_1 = 1.24;\ s_2 = 0.82;\ s_3 = 0.95;\ s_4 = 1.17;\ t_1 = 0.31;\ t_2 = 0.32,$$

получаем $Y_{\mathbf{АдК}}(1) \approx 2.48$.

При $x=2$ для **второго** варианта

$$s_1 = 0.25;\ s_2 = 0.39;\ s_3 = 0.26;\ s_4 = 0.28;\ t_1 = 0.98;\ t_2 = 1.02,$$

получаем $Y_{\mathbf{АдК}}(2) \approx 2.22$.

Так как $Y_{\mathbf{АдК}}\left(1\right) > Y_{\mathbf{АдК}}\left(2\right)$, то второй вариант (по критерию **АдК**) эффективнее первого варианта.

Важно отметить, что второй вариант, скорее всего, не будет принят ЛПР, так как (по критерию **НсК**) для него $Y_{\mathbf{НсК}} = y_3 \approx 0.19$ и $y_3 << \boldsymbol{g}$. Предъявление второго варианта ЛПР показало, что он его не устраивает и тем самым является неэффективным. Применение нейросетевого критерия в отличие от аддитивного критерия показало более лучшие результаты. В общем можно полагать, что использование **НсК** из-за наличия ПЭл и возможных ошибок классификации нейронной сетью может привести к тому, что на контрольной выборке возможны всё-таки ошибки, но их скорее всего будет меньше, чем в случае **АдК**, у которого вообще отсутствует какой-либо контроль на выходе, кроме этого в большинстве случаев существует возможность дообучения.

Данный пример использования разрабатываемого подхода к оценке эффективности технических систем наглядно иллюстрирует, как без фактического анализа закономерностей таких систем, имея только обучающую выборку, можно принимать решение об эффективности рассматриваемого варианта системы.

Этот результат, связанный с нейросетевым критерием, был получен автором вместе с аспирантом *К.И. Ткаченко* в совместной работе [**33**].

<u>Максиминный критерий (МаМиК) (минимаксный критерий (МиМаК)) [20]</u> (см. также [**2**, с.200])

Основная идея метода, основанного на **МаМиК** (**МиМаК**), состоит в том, что эти критерии работают по принципу компромисса, который основывается на идее равномерности. Сама сущность **принципа максимина** состоит в следующем: так как в процессе проектирования сложной технической системы (при наличии большого количества ЧК) выявить между ЧК аналитическую взаимосвязь очень сложно, то пытаются определить такие значения переменных (параметров)

$$X=\{x_1, x_2,\ldots, x_m\},$$

при которых нормированные значения всех ЧК равны между собой [**20**]:

$$\boldsymbol{C_i} \cdot \boldsymbol{f_i}\,(X) = \boldsymbol{K},$$

где

$\boldsymbol{f_i}\,(X)$ — нормированное значение $\boldsymbol{i}$–го ЧК;

$\boldsymbol{C_i}$ — весовой коэффициент $\boldsymbol{i}$–го ЧК;

$\boldsymbol{K}$ — константа.

На практике при большом числе ЧК из-за сложных взаимосвязей сложно добиться выполнения указанного выше соотношения. Поэтому так **варьируют** значениями переменных проектирования x_1, $x_2,\ldots, x_m$, при которых последовательно «**подтягиваются**» те нормированные критерии, численные значения которых в исходном решении оказались **наименьшими**. Поскольку эта операция выполняется в области компромисса, то подтягивание «**отстающего**» критерия неизбежно приводит к **снижению** значений части остальных ЧК. Но при проведении ряда шагов можно добиться определённой степени *уравновешивания противоречивых* ЧК, что и является целью **принципа** максимина [**20**].

Формально принцип максимина формулируется следующим образом [**20**]: необходимо выбрать такой набор переменных $X^{(\mathbf{0})}$, при котором реализуется *максимум* из *минимальных* нормированных значений частных критериев, т.е.

$$\boldsymbol{F}(X^{(\mathbf{0})}) = \max\,\{\min \boldsymbol{f_i}\,(X)\}.$$

Отметим следующее [**20**]. Такой принцип выбора $X^{(0)}$ иногда носит название гарантированного результата. Он заимствован из *теории игр*, где является основным принципом.

Если ЧК необходимо минимизировать, то самым отстающим критерием является тот, который принимает максимальное значение. В этом случае применяют принцип минимакса [**20**]:

$$\boldsymbol{F}(X^{(0)}) = \min\{\max \boldsymbol{f}_i (X)\}. \qquad \mathbf{(1.0)}$$

Основные принципы выбора критериев оптимальности [**20**]

На практике, если необходимо оптимизировать качество проектируемой технической системы по нескольким критериям, то разумно сформировать только один частный критерий.

Тогда уже задача оптимизации сведётся к задаче *максимизации* (или *минимизации*) данного одного критерия с учётом некоторых ограничений.

На практике при наличии нескольких критериев выбирают [**20**]:

а) **аддитивный** критерий, если существенно важны именно абсолютные значения критериев при выбранном векторе параметров $\boldsymbol{x}$;

б) **мультипликативный** критерий, если существенно важно именно изменение **абсолютных** значений частных критериев при вариации вектора $\boldsymbol{x}$;

в) **максиминный (минимаксный)** критерий, если существенно важна именно задача достижения равенства нормированных значений противоречивых (т.е. конфликтных) частных критериев.

Выбирая (или разрабатывая) критерий эффективности технической системы, необходимо **обязательно** учитывать её специфику.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**3**, с.13]. При решении МКЗ используется **субъективная** информация, что может вызывать у ЛПР *недоверие* к полученному решению. Известно, что степень доверия может быть оценена через его устойчивость по отношению к субъективным данным, используемым в применяемых для решения МКЗ методах (весовые коэффициенты, процедуры перевода в относительные единицы и т.п.). **Идея проверки устойчивости** состоит в следующем. Если, например, при варьировании весового коэффициента ***W*** (отражающего субъективное предпочтение некоторого ЛПР) в качестве предпочтительного выделяется **один и тот же** объект (решение), что означает устойчивость результата (по отношению к ***W***), то доверие к выделенному решению выше. Аналогично проверяется устойчивость по отношению к другим методам решения МКЗ. Так, если при использовании несколькими методами выделяется **один и тот же** предпочтительный объект (решение), что означает устойчивость результата (по отношению к другим методам), то доверие к полученному решению высокое.

На рис. 1.3 представлены этапы *подготовки* и *принятия* решений, т.е. дана схема, отражающая рациональную логическую последовательность этапов для многокритериальных задач [**3**, с.4].

Отметим следующее [**3**, с.4]. В реальных практических задачах цель — весьма сложное понятие. Это понятие не всегда даже содержательно удаётся специалистам четко определить (не говоря уже о том, чтобы количественно измерить степень достижения цели). Полное и четкое описание цели совокупностью критериев есть основа успешного решения поставленной задачи принятия решений. Описание цели системой критериев есть НЕформальная процедура, и последующее *агрегирование* критериев на этапе **7** также есть НЕформальная процедура. Поэтому решение многокритериальной задачи не является строгой **математической** задачей (так как это есть набор процедур, помогающих ЛПР *разобраться* и *уточнить* цель принятия решений, *устранить* ошибки в своих оценках, сделать свое поведение в процессе выбора рациональным).

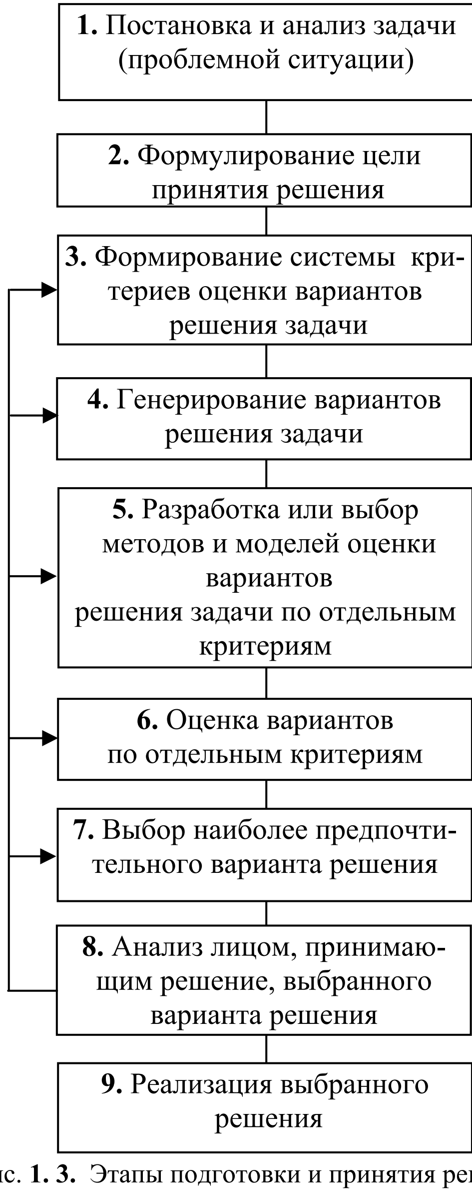


Рис. **1. 3.** Этапы подготовки и принятия решений [**3**, с. 5]

Характеристики этапов, представленных на рис. 1.3 (см. работу [**3**, с.4-6] и др.).

Этап 1. *Выяснение проблемной ситуации.*

Этап 2. *Выяснения и ЧЕТКОГО понимания ЦЕЛИ принятия решения (это неформальная процедура).*

Этап 3. *Сложность ЦЕЛИ; трудность измерения степени достижения ЦЕЛИ различными вариантами решения задачи; этот этап может отсутствовать, если ЦЕЛЬ принятия решения ЧЕТКО определяется ОДНИМ критерием.*

Этап 4. *Получение различных вариантов решения задачи.*

Этап 5. *Выяснение методов и моделей оценки вариантов по отдельным критериям. При необходимости выполняется проверка АДЕКВАТНОСТИ моделей.*

Этап 6. *Возможные варианты оцениваются по отдельным критериям.*

Этап 7. *ЛПР может столкнуться с проблемой многокритериальности (на этапах 2 и 3 ЛПР сам предопределяет постановку многокритериальной задачи из-за того что НЕ смог сформировать в МАТЕМАТИЧЕСКОМ виде ЦЕЛЕВУЮ функцию).*

Этап 8. *В результате анализа ЛПР, выбранного варианта решения возможен возврат к этапам 7,6,5,4,3.*

Этап 9. *Принимаются конкретные меры для реализации (исполнения) решения.*

Решать успешно задачу может только тот ЛПР, который хорошо знает объект исследования и *понимающий* цель задачи (цель принятия решения) [**3**, с.11]. Все необходимые требования на техническую систему задаются в *техническом задании* (ТЗ).

1.3. Парето-оптимальность

Итальянский экономист и социолог *Вильфредо Парето* (1848 — 1923 гг.) **первый** обратил внимание учёных на то обстоятельство, что начинать упорядочение многокритериальных альтернатив нужно с удаления явно худших [**18**].

Специалистами (см. [**18**] и др. работы) создан ряд методов, не "уходящих" от сложности проблемы и предпочитающих учитывать все её стороны. Эти методы основаны на *принципе* КОМПРОМИССА (т.е. принятия взвешенного решения, в котором фигурируют в определённой пропорции все действующие факторы).

В некоторых методах предлагается НЕ **однозначный** ответ, а лишь область разумных (рациональных) решений. Принятие же **однозначного** решения **остается** прерогативой ЛПР.

Один из таких методов — *метод Парето* [**18**], созданный в 1904 г. Суть метода заключается в сохранении множества возможных вариантов и выделении области для выбора наиболее целесообразных вариантов. К области Парето относят только то множество решений, где с изменением какого-либо из них критерии меняются **противоречиво**.

Парето-предпочтительность (ПП), Парето-несравнимость (ПН), Парето-эффективность (ПЭф) [**19**]

Рассмотрим рис. 1.4 [**19**], на котором представлено благосостояние двух субъектов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{U_A}$ и $\boldsymbol{U_B}$ — это ПЭ). Область, ограниченная кривой $\boldsymbol{UU}$, есть *всё множество возможных благосостояний* двух субъектов, а кривая $\boldsymbol{UU}$ называется *границей возможных благосостояний* [**19**]. Её конфигурация определяется конечными ресурсами этой двухсубъектной экономики, знаниями и применяемой технологией.

Понятно, что, как и при рассмотрении границы производственных возможностей, увеличение производственных ресурсов и применяемой технологии сдвигает границу возможных благосостояний вправо вверх. Каждая точка на плоскости $\boldsymbol{U_B O U_A}$ представляет определённую *комбинацию* благосостояний двух субъектов [**19**].

Очевидно [**19**], что комбинация $\boldsymbol{F}$ на рис. 1.4 является недостижимой, так как лежит вне области возможных благосостояний.

Понятия Парето-оптимальности и Парето-предпочтительности связаны друг с другом. Парето-оптимальное состояние можно определить как такое, по отношению к которому не существует ни одного ПП. В то же время любая точка, лежащая на границе возможных решений, например точка **К** или **Е** (см. рис. 1.4), является ПН в отношении любой другой точки на этой границе. Поэтому можно сказать, что множество Парето-оптимальных состояний есть набор всех ПН состояний, **остающийся** после **исключения** из рассмотрения всех нежелательных состояний системы на основе критерия ПП. Действительно [**19**], после исключения из рассмотрения всех точек, лежащих внутри области возможных решений на рис. 1.4, у нас останется лишь сама эта граница, ***UU***, все точки которой окажутся Парето-оптимальными относительно точек, лежащих внутри области возможных благосостояний, но ПН друг с другом [**19**].

Метод поиска Парето-эффективных решений (ПЭР)

Идея метода (см. работу [**20**]) поиска ПЭР можно наглядно показать на примере двух критериев оценки вариантов решения (K_1 и K_2), которые являются равнозначными. Допустим, определено $Y=\{y_1, y_2,\ldots, y_m\}$ — множество оценок альтернативных вариантов решения и определены значения всех критериев: $K_{11}, K_{12},\ldots, K_{1m}$ — значения 1-го критерия для 1, 2, … , m-го варианта решения; $K_{21}, K_{22},\ldots, K_{2m}$ — значения 2-го критерия для 1, 2, … , m-го варианта решения. Тогда изобразим на рис. 1.5 [**20**] множество оценок вариантов решения в пространстве критериев [**20**].

Правило [20]

Множество Парето-эффективных (ПЭф) оценок $P(Y)$ решений представляет собой «**северо-восточную**» границу множества Y **без** тех его частей, которые параллельны одной из координатных осей или лежат в «**глубоких**» провалах.

На рис. 1.5 ПЭф оценки (см. [**20**]) состоят из точек кривой от точки ***b*** до точки ***c*** (исключая точку ***c***), и линии от точки ***d*** до точки ***e***. Таким образом, на языке теории множеств можно записать

$$[bc) \cup [de].$$

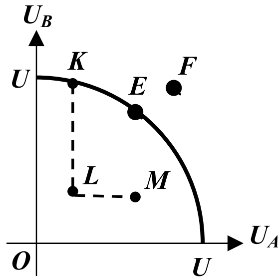


Рис. **1. 4.** Два критерия (ПЭ) $\boldsymbol{U_A}$ и $\boldsymbol{U_B}$
для двух субъектов ***A*** и ***B*** [**19**]

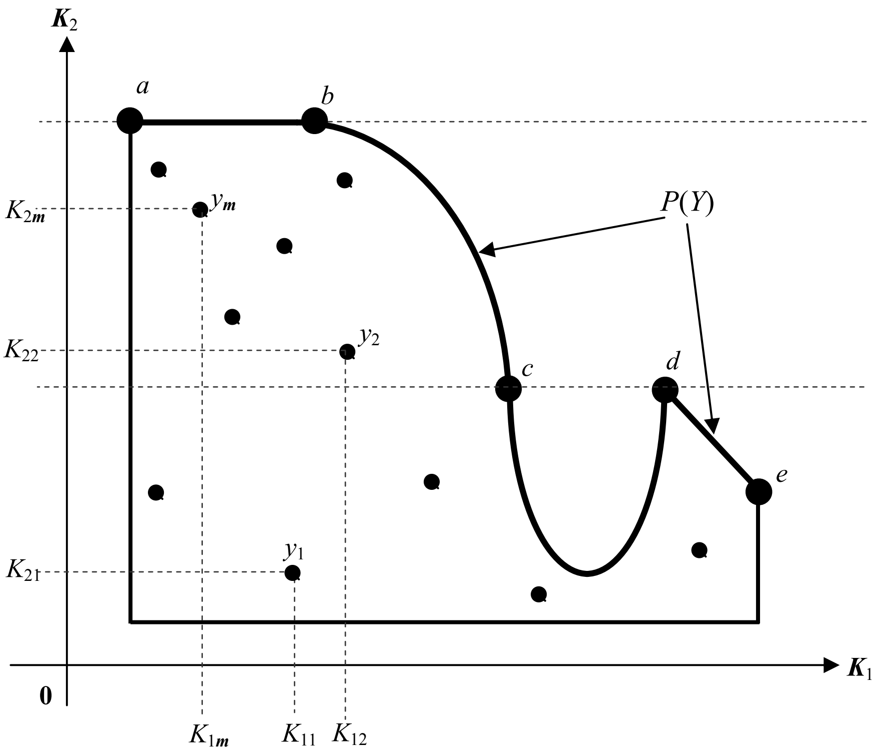


Рис. **1. 5.** Иллюстрация поиска Парето-эффективных решений
(см. и ср. с [**20**])

Метод поиска Парето-эффективных решений (ПЭР) обладает (см. [**20**]) следующими основными

преимуществами:

1) все критерии равнозначны;

2) метод математически объективен;

недостатком:

одно окончательное решение получается только в частном случае (так как, обычно, число ПЭР — более одного).

<u>*Определение 1.8*</u> [**3**, с.8-9]
Объект $\boldsymbol{B_i}$ доминирует объект $\boldsymbol{B_m}$, если по всем критериям $\boldsymbol{B_i}$ предпочтительнее или эквивалентное $\boldsymbol{B_m}$, и хотя бы по одному критерию строго предпочтительнее (тогда объект $\boldsymbol{B_i}$ — доминирующий, а $\boldsymbol{B_m}$ — доминируемый (т.е. вытесняемый [**2**, с.9])).

Если исключить из исходного множества *доминируемые* объекты (решения), то останутся *конкурирующие* (*эффективные*) объекты [**3**, с.9].

Множество *частных критериев* (ЧК), для которых всегда справедлив принцип доминирования, образует множество — *область согласия* (где нет противоречия между ЧК). Оптимальность по Парето означает: нельзя дальше уменьшать значение одного из ЧК, не увеличивая при этом хотя бы одного из остальных ЧК (т.е. в <u>области компромиссов</u> не выполняется принцип доминирования, а ЧК являются противоречивыми). *Под оптимально-компромиссным решением* понимают одну из эффективных точек, являющуюся предпочтительней с точки зрения ЛПР. Такая оптимизация не дает **однозначного** ответа на вопрос: "*Получено ли оптимальное решение*?" Ответ зависит от качественной информации о важности ЧК, которая имеется у ЛПР [**14**, с.23-24].

1.4. Элементы теории игр

<u>Основные понятия и определения теории игр</u>

Появление *теории игр* обычно связывают (см. [**38**, с.97]) с именами американских учёных *Джона фон Неймана* (1903 — 1957 гг.) и *Оскара Моргенштерна* (1902 — 1977 гг.), которые в 1944 г. выпустили в свет (см. [**44**]) свою знаменитую монографию "Теория игр и экономическое поведение".

Как полагают специалисты (см. [**2**, с.173]), в случае "дурной" неопределённости неопределёнными могут как внешние, "объективные" условия операции, так и "субъективные" – сознательные действия противников, соперников и т.п.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.173]. В случае ***"дурной" неопределённости*** (ДН) выводы, вытекающие из научного исследования, НЕ МОГУТ быть ни точными, ни однозначными.

Методам решения задач в условиях "дурной" неопределённости посвящён специальный раздел математики (см. [**2**, с.173]) *"Теория игр и статистических решений"*. Как полагают специалисты (см. [**2**, с.173]), в случае ДН методы этой теории дают (в некоторых редких случаях) возможность найти оптимальное решение. Обычно (что гораздо чаще) эти методы позволяют глубже разобраться в проблемной ситуации, оценив каждое возможное решение с различных (и порой противоречивых) точек зрения (т.е. различных и противоречивых критериев), принять, если не единственно правильное, но зато до конца продуманное решение [**2**, с.173-174].

Конфликтные ситуации (КС) [**2**, с.174] — ситуации, в которых сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные (иногда противоположные) цели, причём выигрыш каждой стороны зависит от того, как себя поведут другие.

Отметим следующее [**2**, с.174]. На практике КС — это наиболее простые из ситуаций, содержащих ДН.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.175]. Каждая взятая конкретная КС очень сложна, а её анализ затруднён наличием НЕсущественных факторов. Поэтому для того чтобы выполнить математический анализ конфликта, строится его математическая модель, называемая *игрой* (**И**).

На практике от реального мира **И** отличается тем, что ведётся по правилам, где указаны *права* и *обязанности* участников **И**, а также исход **И**. В **И** могут сталкиваться интересы двух или более участников (в первом случае **И** называется парной, во втором — множественной). Развитие **И** во времени можно представить как ряд последовательных ходов участников **И** [**2**, с.175].

Ход (**Х**) [**2**, с.175] — *выбор* игроком одного из предусмотренных правилами **И** действий и его *осуществление*.

Личный ход (ЛХ) [**2**, с.175] — сознательный *выбор* игроком (участником) одного из предусмотренных правилами **И** действий и его *осуществление*.

Случайный ход (СХ) [**2**, с.175-176] — случайный *выбор* (не волей игрока (участника)) одного из предусмотренных правилами **И** действий и его *осуществление*.

Стратегия игрока (СИ) [**2**, с.175-176] — совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

Конечная игра (КИ) [**2**, с.176] — игра, в которой у каждого игрока имеется в распоряжении только конечное число стратегий (в противном случае игра есть **бесконечная игра** (БкИ)).

Оптимальная стратегия игрока (ОпСтИг) [**2**, с.176] — такая стратегия, которая обеспечивает ему наилучшее положение в данной игре (т.е. максимальный выигрыш).

Если **И** повторяется *неоднократно* (и содержит кроме ЛХ ещё и СХ), то ОпСтИг обеспечивает максимальный средний выигрыш игроку. Задача *теории игр* — выявление оптимальных стратегий [**2**, с.176].

Игра с нулевой суммой [**2**, с.177] — такая **И**, в которой сумма выигрышей всех игроков равна нулю, т.е. каждый игрок выигрывает только за счет других игроков.

Отметим следующее [**2**, с.177]. Одним из хорошо разработанных разделов теории игр является *конечна парная игра с нулевой суммой*. В этой *парной антагонистической игре* один игрок выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой (см. [**38**, с.98]).

ВАЖНО ПОМНИТЬ (см. подробнее [**34**, с.207-230]). На практике *многоходовую игру* сводят к *одноходовой игре*, когда от каждого игрока требуется сделать только один ход, т.е. выбрать только одну стратегию.

Конечная парная игра с нулевой суммой

Пусть (см. [**38**, с.100-101]) рассматривается игра $\boldsymbol{G}\ \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, т.е. у игрока $\boldsymbol{A}$ (пусть это будем мы) есть $\boldsymbol{m}$ стратегий $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$,…, $\boldsymbol{A_m}$, а у игрока $\boldsymbol{B}$ (пусть это будет противник) есть $\boldsymbol{n}$ стратегий $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{B_2}$, $\boldsymbol{B_3}$,…, $\boldsymbol{B_n}$. Если игра состоит только из ЛХ, то выбор каждым из игроком стратегии однозначно определяет исход игры и выигрыш $\boldsymbol{a_{ij}}$ (т.е. наш выигрыш есть $\boldsymbol{a_{ij}}$, если мы выбрали стратегию $\boldsymbol{A_i}$, а противник — $\boldsymbol{B_j}$).

Если известны все элементы $\boldsymbol{a_{ij}}$, то (см. [**38**, с.101]) игру можно представить в матричной форме (табл. **1.1**).

Платёжная матрица игры (матрица выигрышей) [**38**, с.101] — матрица с элементами выигрышей $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Чистая стратегия игрока (ЧСИ) [**38**, с.103] — стратегия указанная в платёжной матрице.

Смешанная стратегия игрока (ССИ) [**2**, с.175-176] — случайное чередование с определёнными частотами всех или некоторых стратегий, указанных в *платёжной матрице*.

Решение игры (РИ) [**38**, с.111] — совокупность оптимальных стратегий обоих игроков.

ЧСИ есть частный случай ССИ (если в ССИ какая-либо *i*-я ЧСИ применяется с вероятностью **1**, то все остальные ЧСИ НЕ применяются.

Таблица **1.1.** Платёжная матрица (ПМ) игры $G\ \ m\times n$

Чистые стратегии игрока $\boldsymbol{A}$	Чистые стратегии игрока $\boldsymbol{B}$ (противник)					
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	…	$\boldsymbol{B_j}$	…	$\boldsymbol{B_n}$
$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{a_{11}}$	$\boldsymbol{a_{12}}$	…	$\boldsymbol{a_{1j}}$	…	$\boldsymbol{a_{1n}}$
$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{a_{21}}$	$\boldsymbol{a_{22}}$	…	$\boldsymbol{a_{2j}}$	…	$\boldsymbol{a_{2n}}$
…	…	…	…	…	…	…
$\boldsymbol{A_i}$	$\boldsymbol{a_{i1}}$	$\boldsymbol{a_{i2}}$	…	$\boldsymbol{a_{ij}}$	…	$\boldsymbol{a_{in}}$
…	…	…	…	…	…	…
$\boldsymbol{A_m}$	$\boldsymbol{a_{m1}}$	$\boldsymbol{a_{m2}}$	…	$\boldsymbol{a_{mj}}$	…	$\boldsymbol{a_{mn}}$

Если для конкретной игры $\boldsymbol{G\ \ m\ \times n}$ составлена таблица (см. табл. 1.1), то говорят, что игра ***G*** **приведена к матричной форме** (при этом само приведение к такой форме может уже представлять серьезную проблему) [**2**, с.178].

Нижняя цена игры α (**максимин** или **максиминный выигрыш**) [**38**, с.108] — $\boldsymbol{\alpha}=\max\limits_{1\le i\le m}\left(\min\limits_{1\le j\le n}\left\{a_{ij}\right\}\right)$.

Верхняя цена игры β (**минимакс** или **минимаксный выигрыш**) [**38**, с.110] — $\boldsymbol{\beta}=\min\limits_{1\le j\le n}\left(\max\limits_{1\le i\le m}\left\{a_{ij}\right\}\right)$.

Число **α** находится в некоторой строке платёжной матрицы (см. табл. 1.1). Стратегия игрока ***A***, соответствующая этой строке, называется **максиминной** стратегией (если игрок ***A*** будет придерживаться этой стратегии, то при любом поведении противника (т.е. игрока ***B***) игроку ***A*** гарантирован выигрыш, во всяком случае, не меньше, чем **α**) [**38**, с.108].

Число **β** находится в некотором столбце платёжной матрицы (см. табл. 1.1). Стратегия игрока ***B***, соответствующая этому столбцу, называется **минимаксной** стратегией (если игрок ***B*** будет придерживаться этой стратегии, то при любом поведении игрока ***A*** игроку $\boldsymbol{B}$ гарантирован проигрыш, во всяком случае, не больше, чем $\boldsymbol{\beta}$).

<u>*Определение 1.9*</u> [**38**, с.111]
Если для некоторой игры справедливо, что $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$, т.е.

$$\boldsymbol{a_{i^*j^*}}=\max_{1\le i\le m}\left(\min_{1\le j\le n}\left\{a_{ij}\right\}\right)=\min_{1\le j\le n}\left(\max_{1\le i\le m}\left\{a_{ij}\right\}\right)=\boldsymbol{\nu}, \qquad (\mathbf{1.1})$$

то $\boldsymbol{\nu}$ называют *ценой игры* (или *чистой ценой игры*), саму такую игру называют игрой с *седловой точкой*, а элемент $\boldsymbol{a_{i^*j^*}}$ платёжной матрицы называют *седловой точкой*.

Если игра НЕ имеет *седловую точку*, то для неё $\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\beta}$, а для цены игры $\boldsymbol{\nu}$ справедливо соотношение [**38**, с.112-113]:

$$\boldsymbol{\alpha}\le\boldsymbol{\nu}\le\boldsymbol{\beta}.$$

Результат взаимных действий ($\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{B_j}$) характеризуется [**34**, с.202] ***критерием эффективности*** $\boldsymbol{a_{ij}}$, который представляет собой выигрыш игрока $\boldsymbol{A}$ (или проигрыш игрока $\boldsymbol{B}$).

<u>*Принцип минимакса.*</u> Принцип, согласно которому игрок $\boldsymbol{A}$ выбирает **максиминную** стратегию, а игрок $\boldsymbol{B}$ выбирает **минимаксную** стратегию, — это и есть *принцип минимакса* (т.е. принцип *осторожности*, или принцип *гарантированного результата*).

<u>***Решение игры с седловой точкой***</u>

Для того чтобы найти *решение игры* с *седловой точкой*, необходимо найти саму *седловую точку* платёжной матрицы (т.е. определить элемент $\boldsymbol{a_{i^*j^*}}$ из соотношения (**1.1**)), тогда *решение игры* есть совокупность двух стратегий $\boldsymbol{A_{i^*}}$ и $\boldsymbol{B_{j^*}}$, соответствующих этой найденной седловой точке $\boldsymbol{a_{i^*j^*}}$.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**38**, с.112]. Если игра имеет *седловую точку*, то в ней ВСЯКОЕ отклонение одного из игроков от своей оптимальной стратегии идет во вред этому игроку и, соответственно, идет на пользу противнику. Для оптимальных стратегий обоих игроков характерна **устойчивость** — *ни одному из игроков не может быть выгодно отклониться от собственной оптимальной стратегии*.

В теории игр доказывается, что *седловую точку* имеет любая игра с *полной информацией* (т.е. в которой каждый игрок при каждом *личном ходе* знает результаты всех предыдущих ходов, например в шахматах). Если игра имеет *седловую точку*, то в ней (в отличие от игры без *седловой точки*) нет смысла скрывать свои намеренья и нет необходимости в случайных изменениях стратегий. Если игра имеет *седловую точку*, то можно говорить, что её исход заранее предрешён [**38**, с.112].

Отметим следующие правила рационального поведения в некооперативной игре с нулевой суммой выигрыша и с двумя игроками [**36**]:

- если известно, что противник выбрал стратегию *седловой точки*, то целесообразно и нам выбрать эту же стратегию;
- если не известно, какую стратегию выбрал противник, то при полном противоречии интересов игроков, нам разумно выбрать решение *седловой точки*;
- если известно, что противник не придерживается стратегии, соответствующей *седловой точке*, то нам разумно тоже не придерживаться стратегии, соответствующей *седловой точке*.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**38**, с.100]. Решение *конечной парной антагонистической игры* лежит в области чистых или смешанных стратегий. Решение в чистых стратегиях наблюдается в *играх с седловой точкой*. Если игра не имеет этой *седловой точки*, то существует решение в смешанных стратегиях.

<u>Решение игры без седловой точки</u>

В оптимальные смешанные стратегии могут входить не все, а только <u>некоторые</u> из имеющихся у игроков чистых стратегий. Эти некоторые стратегии получили название **активных** (или **полезных**) стратегий.

Активная стратегия (АС) [**34**, с.221; **35**, с.94] — *чистая* стратегия, которая входит в *смешанную* стратегию с отличной от нуля вероятностью её применения в *смешанной* стратегии.

Для того чтобы найти *решение игры* $\boldsymbol{G}\ \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{m}$ стратегий у игрока $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{n}$ стратегий у игрока $\boldsymbol{B}$) без ***седловой точки*** (в самом общем случае), необходимо свести (см. работы [**2**, с.185-192; **35**, с.105-112; и др.]) исходную формулировку задачи к задаче *линейного программирования*. Затем воспользоваться уже известными методами (см. [**2**, с.185-192; **37** и др.]) для решения задачи *линейного программирования*.

Отметим следующее. Существует *приближенный метод* получения решения игры (подробнее см. [**2**, с.189-192]).

В теории игр доказана следующая *Теорема об активных стратегиях*:

Теорема 1.1 (см. [**35**, с.94; **38**, с.114])
Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш (проигрыш) остается неизменным и равным цене игры **v** *независимо от того, что делает другой игрок — лишь бы он не выходил за рамки своих активных стратегий (т.е. пользуется любой из них в чистом виде или смешивает их в любых пропорциях)* ■

Пример **1.Б** (см. работы [**34**, с.230-231; **35**, с.94-99; **38**, с.114-126]). Найдём решение игры $\boldsymbol{G}$ $\mathbf{2 \times 2}$ в смешанных стратегиях. Известны элементы платёжной матрицы

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22},$$

и надо найти цену игры **v** и вероятности

$$p_1, p_2, q_1, q_2$$

для оптимальных смешанных стратегий каждого из двух игроков.

Рассмотрим игрока $\boldsymbol{A}$. При выборе игроком $\boldsymbol{A}$ оптимальной смешанной стратегии $S^*_A=(p_1,\ p_2)$ и выборе игроком $\boldsymbol{B}$ чистой стратегии $\boldsymbol{B_1}$ средний выигрыш игрока $\boldsymbol{A}$ при многократном повторении игры есть $a_{11}\,p_1+a_{21}\,p_2$.

Согласно ***Теореме*** *об активных стратегиях* средний выигрыш должен равняться цене игры **v** [**38**, с.114]:

$$a_{11}\,p_1 + a_{21}\,p_2=\mathbf{v}.$$

При выборе игроком ***A*** оптимальной смешанной стратегии

$$S^*_A=(p_1, p_2)$$

и выборе игроком ***B*** чистой стратегии ***B*₂** средний выигрыш игрока ***A*** при многократном повторении игры есть

$$a_{12}p_1+a_{22}p_2.$$

Согласно той же ***Теореме*** *об активных стратегиях* <u>средний выигрыш</u> должен равняться цене игры $\mathbf{v}$ [**38**, с.114]:

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2=\mathbf{v}.$$

Тогда можно составить следующую систему уравнений [**38**, с.114]:

$$\begin{cases} a_{11}\,p_1 + a_{21}\,p_2=\mathbf{v}; \\ a_{12}\,p_1 + a_{22}\,p_2=\mathbf{v}; \\ p_1 + p_2=1, \end{cases}$$

из которой можно найти p_1, p_2, $\mathbf{v}$ [**38**, с.115]:

$$p_1= (a_{22}- a_{21}) \cdot (a_{11}+a_{22}- a_{12}- a_{21})^{-1}; \qquad \mathbf{(1.2)}$$

$$p_2=1- p_1= (a_{11}- a_{12}) \cdot (a_{11}+a_{22}- a_{12}- a_{21})^{-1}; \qquad \mathbf{(1.3)}$$

$$\mathbf{v}=(a_{11}\,a_{22}- a_{21}\,a_{12}) \cdot (a_{11}+a_{22}- a_{12}- a_{21})^{-1}. \qquad \mathbf{(1.4)}$$

<u>Рассмотрим игрока ***B***.</u> Проводя аналогичные рассуждения для игрока ***B*** (полагая выбор игроком ***B*** оптимальной смешанной стратегии $S^*_B=(q_1, q_2)$ и выборе игроком ***A*** чистой стратегии ***A*₁** или ***A*₂**), получаем систему [**38**, с.115]

$$a_{11}\,q_1+ a_{12}\,q_2=\mathbf{v};$$
$$a_{21}q_1+ a_{22}\,q_2=\mathbf{v};$$
$$q_1+ q_2=1,$$

из которой можно найти q_1, q_2 [**38**, с.115]:

$$q_1= (a_{22} - a_{12}) \cdot (a_{11}+a_{22}- a_{12}- a_{21})^{-1}; \qquad \mathbf{(1.5)}$$

$$q_2=1- q_1= (a_{11}- a_{21}) \cdot (a_{11}+a_{22}- a_{12}- a_{21})^{-1} \blacksquare \qquad \mathbf{(1.6)}$$

Отметим следующее. Применение игроком *одной* ЧСИ исключает применение *другой*, т.е. ЧСИ есть **несовместные** события, а также они есть **единственные** возможные события. Если есть СХ, то выигрыш *случаен*, и можно взять *математическое ожидание* (**м.о.**) выигрыша. Средний выигрыш игрока $\boldsymbol{A}$ в игре $\boldsymbol{G}\ \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ с элементами выигрышей $\boldsymbol{a_{ij}}$ платёжной матрицы выражается в виде **м.о.** его выигрышей.

Для нахождения *решения игры* необходимо сначала проверить наличие у данной игры *седловой точки*:

- если эта точка есть, то игра имеет решение в *чистых стратегиях*, причём оптимальными стратегиями игроков $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ соответственно будут *чистая* **максиминная** и *чистая* **минимаксная** стратегии;
- если же игра НЕ имеет *седловой точки*, то оба игрока имеют только такие оптимальные стратегии, которые используют все свои *чистые стратегии* с положительными вероятностями (иначе один из игроков (например, игрок $\boldsymbol{A}$) имеет чистую оптимальную стратегию, а другой — только *смешанную* стратегию).

Дополнительные и более подробные сведения представлены в работах [**44-48**].

<u>Упрощение игр</u>

Если для игры $\boldsymbol{G}\ \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ построена *платёжная матрица* (ПМ), то иногда игру $\boldsymbol{G}\ \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ возможно упростить, т.е. можно отбросить такие стратегии игроков, которые не могут быть выгодными ни при каких обстоятельствах, и тем самым сократить размер *платёжной матрицы* (см. также метод поиска Парето-эффективных решений).

Доминирование стратегий (см. [**35**, с.103] и др.)**.** Если для игры $\boldsymbol{G}\ \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ её *платёжная матрица* такова, что каждый элемент $\boldsymbol{a_{ij}}$ некоторой строки $\boldsymbol{i}$ не меньше соответствующего элемента $\boldsymbol{a_{kj}}$ строки $\boldsymbol{k}$ (т.е. $\boldsymbol{a_{ij}} \geq \boldsymbol{a_{kj}}$) и, по меньшей мере, один её элемент строго больше соответствующего элемента строки $\boldsymbol{k}$, то говорят, что

стратегия $\boldsymbol{A_i}$ игрока $\boldsymbol{A}$ *доминирует* его стратегию $\boldsymbol{A_k}$.

Доминируемая стратегия $\boldsymbol{A_k}$ не может быть оптимальной ЧСИ $\boldsymbol{A}$ или войти в его оптимальную ССИ с ненулевой вероятностью, и поэтому её можно исключить из анализа, вычеркнув (т.е. удалив) из *платёжной матрицы* строку $\boldsymbol{k}$.

Аналогично, если каждый элемент $\boldsymbol{a_{ij}}$ некоторого столбца $\boldsymbol{j}$ не больше соответствующего элемента столбца $\boldsymbol{s}$ (т.е. $\boldsymbol{a_{ij}} \le \boldsymbol{a_{is}}$) и, по меньшей мере, один его элемент строго меньше соответствующего элемента столбца $\boldsymbol{s}$, то говорят, что стратегия $\boldsymbol{B_j}$ игрока $\boldsymbol{B}$ доминирует его стратегию $\boldsymbol{B_s}$, и поэтому столбец $\boldsymbol{s}$ *платёжной матрицы* можно удалить (т.е. вычеркнуть).

Отметим следующее (см. [**35**, с.103] и др.). Если ко всем элементам *платёжной матрицы* прибавить одно и то же некоторое число, то оптимальные смешанные стратегии не изменятся, а цена игры увеличится на это число. Если все элементы *платёжной матрицы* умножить на одно и то же некоторое число не равное нулю, то оптимальные стратегии не изменятся, а цена игры умножится на это число.

Следующие правила позволяют на практике, иногда значительно, упростить игру (т.е. упростить исходную *платёжную матрицу* игры), прежде чем искать *решение игры*.

Правило 1.1 (см. [**38**, с.130])**.** Если все элементы строки ПМ не больше соответствующих элементов другой строки, то исходная строка может быть вычеркнута из платёжной матрицы. Аналогично справедливо и для столбцов платёжной матрицы.

Правило 1.2 (см. [**38**, с.130])**.** Если в ПМ есть *дублирующие стратегии* (т.е. такие стратегии, для которых все элементы одной строки равны всем элементам другой строки (или все элементы одного столбца равны всем элементам другого столбца)), из дублирующих стратегий достаточно оставить в **платёжной матрице** только одну стратегию (не важно, какую именно).

Иногда вводят понятие выпуклой комбинации (см. [**34**, с.236-238]), и тогда можно добавить ещё два правила.

Правило 1.3 (см. подробнее [**34**, с.236-238]). Если строка ПМ строго доминируется выпуклой комбинацией других строк, то эта строка может быть вычеркнута из ПМ.

Правило 1.4 (см. подробнее [**34**, с. 236-238]). Если столбец ПМ строго доминируется выпуклой комбинацией других столбцов, то этот столбец может быть вычеркнут из ПМ.

Отметим следующее (см. [**34**, с.240-241; и др.]). Исключение из ПМ доминируемых (НЕ строго) стратегий может привести к потере некоторых решений. Если же исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменится.

1.5. Методические указания

На практике, при решении задач с помощью рассмотренных ранее критериев удобно придерживаться следующей последовательности действий, которая может меняться в зависимости от конкретных условий задачи:

1). Вводят, если требуется, необходимые обозначения.

Представляют, если требуется, исходные данные так, чтобы была известна платёжная матрица $|a_{ij}|$ (матрица выигрышей ЛПР). Формулируют, если требуется, исходную задачу так, чтобы был явно задан критерий, или пытаются представить задачу как задачу теории игр (возможно, придётся полностью или частично переформулировать исходную задачу).

2). В случае наличия матрицы выигрышей ЛПР и критерия оптимальности выполняют следующие действия:

А). Вычисляют компоненты критерия.

Б). Вычисляют значения критерия.

В). Находят оптимальные стратегии.

В случае задачи теории игр выполняют следующие действия:

А). Упрощают игру, если это возможно.

Б). Проверяют наличие седловой точки.

В). Если седловая точка есть, то определяют оптимальные чистые стратегии игроков. Если этой точки нет, то определяют оптимальные смешанные стратегии (т.е. находят решение игры).

3). Анализируя полученные результаты, стараются получить конечный ответ на поставленный в задаче вопрос.

1.6. Некоторые примеры решённых задач

Для приобретения навыка работы с критериями необходимо очень подробно и тщательно самостоятельно решить различные по сложности примеры задач (в крайнем случае, если нет такой возможности, то изучить очень подробные решения разобранных примеров).

В первой группе примеров требуется применить один-единственный критерий Вальда и получить оптимальное решение (стратегию). Это самые простые по сложности задачи.

Во второй группе имеется пример задачи, в которой требуется применить более сложный критерий Сэвиджа. Это чуть труднее по сложности задача.

В третьей группе имеется пример задачи, в которой требуется применить ещё более сложный критерий Гурвица. Это более трудная по сложности задача.

В четвёртой группе представлен пример задачи, в которой требуется последовательно применить несколько критериев и получить оптимальное решение (стратегию). Это более трудоёмкая по решению задача.

В пятой группе примеров требуется проверить наличие седловой точки, решить игру (т.е. получить оптимальное решение (стратегии)), а также выполнить упрощение игры, если это возможно. Это практически не очень сложные задачи.

Перейдём к рассмотрению решений задач, связанных с критериями и поиском оптимальных стратегий.

Пример 1.1 (см. и ср. [**2**, с. 202-203])

Используя критерий Вальда, принять решение (выбрать стратегию) в случае следующей платёжной матрицы $|\boldsymbol{a_{ij}}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A}_i$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)		
	$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$
$\boldsymbol{A_1}$	20	30	15
$\boldsymbol{A_2}$	75	20	35
$\boldsymbol{A_3}$	27	80	25
$\boldsymbol{A_4}$	85	5	45

Решение

1). Требуется применить критерий Вальда, для которого (по определению) справедливо следующее выражение:

$$\boldsymbol{V} = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\} = a_{\boldsymbol{i^* j^*}},$$

где в каждой строке матрицы $|a_{\boldsymbol{ij}}|$ выбирается минимальное значение. Оптимальному решению соответствует такое решение (т.е. стратегия $\boldsymbol{A_i}$ при $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i^*}$), которому соответствует максимум этого минимума (т.е. $a_{\boldsymbol{i^* j^*}}$). В данной задаче n=3 и m=4.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M_1} = \min\{20, 30, \mathbf{15}\} = \mathbf{15}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M_2} = \min\{75, \mathbf{20}, 35\} = \mathbf{20}.$$

Для 3-й строки:

$$\boldsymbol{M_3} = \min\{27, 80, \mathbf{25}\} = \mathbf{25}.$$

Для 4-й строки:

$$\boldsymbol{M_4} = \min\{85, \ \mathbf{5}, 45\} = \mathbf{5}.$$

3). Запишем полученные минимумы по каждой строке в дополнительный столбец с правой стороны платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			Минимум в i-й строке
	$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$	M_i
A_1	20	30	**15**	**15**
A_2	75	**20**	35	**20**
A_3	27	80	**25**	**25**
A_4	85	**5**	45	**5**

4). Среди уже найденных минимумов M_i выберем тот из них, который максимален.

Получаем, что $a_{i^* j^*} = a_{33}$, так как

$$R = \max\{15, 20, \mathbf{25}, 5\} = \mathbf{25}.$$

5). Запишем полученный результат R в дополнительную строку внизу платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

	Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			Минимум в i-й строке
		$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$	M_i
	A_1	20	30	**15**	**15**
	A_2	75	**20**	35	**20**
$\Rightarrow$	A_3	27	80	**25**	**25**
	A_4	85	**5**	45	**5**
	Максимум среди минимумов (R)				25

6). Определим оптимальную стратегию, соответствующую R.

Максимуму среди минимумов (R) соответствует стратегия A_3.

Этот критерий очень осторожен, так как ориентирован на **наихудшие** условия, среди которых отыскивается наилучший и гарантированный результат.

7). И тем самым задача решена■

Пример 1.2 (см. и ср. [**2**, с. 202-203])

Используя критерий Вальда, принять решение (выбрать стратегию) в случае следующей платёжной матрицы $|\boldsymbol{a_{ij}}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)		
	$\mathbf{П}_1$	$\mathbf{П}_2$	$\mathbf{П}_3$
$\boldsymbol{A_1}$	20	30	15
$\boldsymbol{A_2}$	75	20	35
$\boldsymbol{A_3}$	25	80	25
$\boldsymbol{A_4}$	85	5	45

Решение

1). Требуется применить критерий Вальда, для которого (по определению) справедливо следующее выражение:

$$\boldsymbol{V} = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\} = a_{\boldsymbol{i^* j^*}},$$

где в каждой строке матрицы $|a_{ij}|$ выбирается минимальное значение. Оптимальному решению соответствует такое решение (т.е. стратегия $\boldsymbol{A_i}$ при $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i^*}$), которому соответствует максимум этого минимума (т.е. $a_{\boldsymbol{i^* j^*}}$). В данной задаче n=3 и m=4.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M_i}$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M_1} = \min\{20, 30, \mathbf{15}\} = \mathbf{15}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M_2} = \min\{75, \mathbf{20}, 35\} = \mathbf{20}.$$

Для 3-й строки:

$$\boldsymbol{M_3} = \min\{\mathbf{25}, 80, \mathbf{25}\} = \mathbf{25}.$$

Для 4-й строки:

$$\boldsymbol{M_4} = \min\{85, \ \mathbf{5}, 45\} = \mathbf{5}.$$

3). Запишем полученные минимумы по каждой строке в дополнительный столбец с правой стороны платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			Минимум в i-й строке
	$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$	M_i
A_1	20	30	**15**	**15**
A_2	75	**20**	35	**20**
A_3	**25**	80	**25**	**25**
A_4	85	**5**	45	**5**

4). Среди уже найденных минимумов M_i выберем тот из них, который максимален.

Получаем, что $a_{i^*j^*} = \{a_{31}, a_{33}\}$, так как

$$R = \max\{15, 20, \mathbf{25}, \ 5\} = \mathbf{25}.$$

5). Запишем полученный результат R в дополнительную строку внизу платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

	Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			Минимум в i-й строке
		$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$	M_i
	A_1	20	30	**15**	**15**
	A_2	75	**20**	35	**20**
$\Rightarrow$	A_3	**25**	80	**25**	**25**
	A_4	85	**5**	45	**5**
	Максимум среди минимумов (R)				25

6). Определим оптимальную стратегию, соответствующую R.

Максимуму среди минимумов (R) соответствует стратегия A_3.

В строке для A_3 имеется два значения 25 (одно для $\mathbf{П_1}$, а другое для $\mathbf{П_3}$). Однако наличие двух значений 25 не влияет на конечный выбор стратегии A_3, так как собственно сам выбор выполняется по столбцу со значениями M_i.

7). И тем самым задача решена■

Пример 1.3 (см. и ср. [**2**, с. 202-203])

Используя критерий Вальда, принять решение (выбрать стратегию) в случае следующей платёжной матрицы $|\boldsymbol{a_{ij}}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A}_i$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)		
	$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$
$\boldsymbol{A_1}$	20	30	15
$\boldsymbol{A_2}$	75	20	35
$\boldsymbol{A_3}$	25	25	25
$\boldsymbol{A_4}$	85	5	45

Решение

1). Требуется применить критерий Вальда, для которого (по определению) справедливо следующее выражение:

$$\boldsymbol{V} = \max_{1\le i\le m}\left\{\min_{1\le j\le n} a_{ij}\right\} = a_{\boldsymbol{i^*j^*}},$$

где в каждой строке матрицы $|a_{\boldsymbol{ij}}|$ выбирается минимальное значение. Оптимальному решению соответствует такое решение (т.е. стратегия $\boldsymbol{A_i}$ при $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i^*}$), которому соответствует максимум этого минимума (т.е. $a_{\boldsymbol{i^*j^*}}$). В данной задаче n=3 и m=4.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M_1} = \min\{20, 30, \mathbf{15}\} = \mathbf{15}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M_2} = \min\{75, \mathbf{20}, 35\} = \mathbf{20}.$$

Для 3-й строки:

$$\boldsymbol{M_3} = \min\{\mathbf{25}, \mathbf{25}, \mathbf{25}\} = \mathbf{25}.$$

Для 4-й строки:

$$\boldsymbol{M_4} = \min\{85, \mathbf{5}, 45\} = \mathbf{5}.$$

3). Запишем полученные минимумы по каждой строке в дополнительный столбец с правой стороны платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация Π_j)			Минимум в i-й строке
	$\mathbf{\Pi_1}$	$\mathbf{\Pi_2}$	$\mathbf{\Pi_3}$	M_i
A_1	20	30	**15**	**15**
A_2	75	**20**	35	**20**
A_3	**25**	**25**	**25**	**25**
A_4	85	**5**	45	**5**

4). Среди уже найденных минимумов M_i выберем тот из них, который максимален.

Получаем, что $a_{i^* j^*} = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}$, так как

$$R = \max\{15, 20, \mathbf{25}, 5\} = \mathbf{25}.$$

5). Запишем полученный результат R в дополнительную строку внизу платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

	Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация Π_j)			Минимум в i-й строке
		$\mathbf{\Pi_1}$	$\mathbf{\Pi_2}$	$\mathbf{\Pi_3}$	M_i
	A_1	20	30	**15**	**15**
	A_2	75	**20**	35	**20**
$\Rightarrow$	A_3	**25**	**25**	**25**	**25**
	A_4	85	**5**	45	**5**
	Максимум среди минимумов (R)				25

6). Определим оптимальную стратегию, соответствующую R.

Максимуму среди минимумов (R) соответствует стратегия A_3.

В строке для A_3 имеется 3 значения 25 (одно для Π_1, следующее для Π_2, а ещё одно для Π_3). Наличие трёх значений 25 не влияет на конечный выбор стратегии A_3, так как собственно сам выбор выполняется именно по столбцу M_i со значением в нём 25.

7). И тем самым задача решена■

Пример 1.4 (см. и ср. [**2**, с. 202-203])

Используя критерий Вальда, принять решение (выбрать стратегию) в случае следующей платёжной матрицы $|\boldsymbol{a_{ij}}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A}_i$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)		
	$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$
$\boldsymbol{A_1}$	90	30	25
$\boldsymbol{A_2}$	75	20	35
$\boldsymbol{A_3}$	27	80	25
$\boldsymbol{A_4}$	85	5	45

Решение

1). Требуется применить критерий Вальда, для которого (по определению) справедливо следующее выражение:

$$\boldsymbol{V} = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\} = a_{\boldsymbol{i^* j^*}},$$

где в каждой строке матрицы $|a_{ij}|$ выбирается минимальное значение. Оптимальному решению соответствует такое решение (т.е. стратегия $\boldsymbol{A_i}$ при $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i^*}$), которому соответствует максимум этого минимума (т.е. $a_{\boldsymbol{i^* j^*}}$). В данной задаче n=3 и m=4.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M_1} = \min\{90, 30, \mathbf{25}\} = \mathbf{25}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M_2} = \min\{75, \mathbf{20}, 35\} = \mathbf{20}.$$

Для 3-й строки:

$$\boldsymbol{M_3} = \min\{27, 80, \mathbf{25}\} = \mathbf{25}.$$

Для 4-й строки:

$$\boldsymbol{M_4} = \min\{85, \ \mathbf{5}, 45\} = \mathbf{5}.$$

3). Запишем полученные минимумы по каждой строке в дополнительный столбец с правой стороны платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация Π_j)			Минимум в i-й строке
	Π_1	Π_2	Π_3	M_i
A_1	90	30	**25**	**25**
A_2	75	**20**	35	**20**
A_3	27	80	**25**	**25**
A_4	85	**5**	45	**5**

4). Среди уже найденных минимумов M_i выберем тот из них, который максимален.

Получаем, что $a_{i^* j^*} = \{a_{13}, a_{33}\}$, так как

$$R = \max\{\mathbf{25}, 20, \mathbf{25}, 5\} = \mathbf{25}.$$

5). Запишем полученный результат R в дополнительную строку внизу платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

	Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация Π_j)			Минимум в i-й строке
		Π_1	Π_2	Π_3	M_i
$\Rightarrow$	A_1	90	30	**25**	**25**
	A_2	75	**20**	35	**20**
$\Rightarrow$	A_3	27	80	**25**	**25**
	A_4	85	**5**	45	**5**
	Максимум среди минимумов (R)				25

6). Определим оптимальную стратегию, соответствующую R.

Значению R=25 соответствуют уже 2 стратегии — A_1 и A_3.

Согласно критерию Вальда стратегии A_1 и A_3 равноценны. Этот критерий *очень осторожен*, так как ориентирован на *наихудшие* условия, среди которых отыскивается наилучший и гарантированный результат.

7). И тем самым задача решена■

Пример 1.5 (см. и ср. [**2**, с. 202-203])

Используя критерий Сэвиджа, принять решение (выбрать стратегию) в случае следующей платёжной матрицы $|\boldsymbol{a_{ij}}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)		
	$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$
$\boldsymbol{A_1}$	20	30	15
$\boldsymbol{A_2}$	75	20	35
$\boldsymbol{A_3}$	25	80	25
$\boldsymbol{A_4}$	85	5	45

Решение

1). Требуется применить критерий Сэвиджа, для которого (по определению) справедливо следующее выражение:

$$\boldsymbol{S} = \min_{1 \le j \le n} \left\{ \max_{1 \le i \le m} r_{ij} \right\}, \qquad r_{ij} = \max_{1 \le k \le m} \{a_{kj}\} - a_{ij},$$

т.е. в каждом столбце матрицы $|a_{ij}|$ выбирается максимальное значение $\boldsymbol{D}_j$, затем вычисляется значение $r_{ij} = \boldsymbol{D}_j - a_{ij}$. Оптимальному решению соответствует такое решение (т.е. стратегия $\boldsymbol{A_i}$ при $\boldsymbol{i}$=$\boldsymbol{i^*}$), которому соответствует минимум этого максимума (т.е. $a_{i^* j^*}$). В данной задаче n=3 и m=4.

2). Вычислим максимумы $\boldsymbol{D}_j$ по каждому j-му столбцу платёжной матрицы, т.е. $\boldsymbol{D}_j = \max\limits_{1 \le k \le m=4} \{a_{kj}\}$.

Для 1-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_1 = \max\{20, 75, 25, \mathbf{85}\} = \mathbf{85}.$$

Для 2-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_2 = \max\{30, 20, \mathbf{80}, 5\} = \mathbf{80}.$$

Для 3-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_3 = \max\{15, 35, 25, \mathbf{45}\} = \mathbf{45}.$$

3). Запишем полученные максимумы $\boldsymbol{D}_j$ по каждому j-му столбцу в дополнительную строку снизу платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A}_i$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)		
	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**
$\boldsymbol{A}_1$	20	30	15
$\boldsymbol{A}_2$	75	20	35
$\boldsymbol{A}_3$	25	**80**	25
$\boldsymbol{A}_4$	**85**	5	**45**
Максимумы $\boldsymbol{D}_j$ по каждому j-му столбцу	85	80	45

4). Перейдём от матрицы выигрышей к матрице рисков. Для этого вычислим все элементы матрицы рисков по формуле

$$r_{ij} = \boldsymbol{D}_j - a_{ij}$$

и получим следующую матрицу рисков:

Матрица рисков 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A}_i$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)		
	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**
$\boldsymbol{A}_1$	**65**	50	30
$\boldsymbol{A}_2$	10	**60**	10
$\boldsymbol{A}_3$	**60**	0	20
$\boldsymbol{A}_4$	0	**75**	0

5). Вычислим максимумы $\boldsymbol{W}_i$ по каждой строке матрицы рисков.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{W}_1 = \max\{65, 50, 30\} = \mathbf{65}.$$

Для 2-й строки:

$$W_2 = \max\{10, \mathbf{60}, 10\} = \mathbf{60}.$$

Для 3-й строки:

$$W_3 = \max\{\mathbf{60},\ 0, 20\} = \mathbf{60}.$$

Для 4-й строки:

$$W_4 = \max\{0,\ \mathbf{75}, 0\} = \mathbf{75}.$$

6). Запишем полученный результат $\boldsymbol{W_i}$ в дополнительный столбец с правой стороны матрицы рисков. Получим следующую таблицу:

Матрица рисков 4×3

	Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A_i}$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			Максимумы в i-й строке
		$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$	$\boldsymbol{W_i}$
	$\boldsymbol{A_1}$	**65**	50	30	**65**
⇒	$\boldsymbol{A_2}$	10	**60**	10	**60**
⇒	$\boldsymbol{A_3}$	**60**	0	20	**60**
	$\boldsymbol{A_4}$	0	**75**	0	**75**

7). Среди уже найденных максимумов $\boldsymbol{W_i}$ выберем тот из них, который минимален.

Получаем, что

$$\boldsymbol{Q} = \min\{65, \mathbf{60}, \mathbf{60}, 75\} = \mathbf{60}.$$

8). Определим оптимальную стратегию, соответствующую $\boldsymbol{Q}$.

Значению $\boldsymbol{Q}$=60 соответствуют 2 стратегии — $\boldsymbol{A_2}$ и $\boldsymbol{A_3}$.

В соответствии с критерием Сэвиджа обе стратегии $\boldsymbol{A_2}$ и $\boldsymbol{A_3}$ являются оптимальными. Таким образом, выбрано такое решение (стратегия $\boldsymbol{A_2}$ и $\boldsymbol{A_3}$), при котором величина риска принимает <u>наименьшее</u> значение в самой <u>неблагоприятной</u> (т.е. когда максимален риск) ситуации.

9). И тем самым задача решена■

Пример 1.6 (см. и ср. [**2**, с. 203])

Используя критерий Гурвица (при $\chi=0.6$), принять решение (выбрать стратегию) в случае следующей платёжной матрицы $|\boldsymbol{a_{ij}}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)		
	П$_1$	**П$_2$**	**П$_3$**
$\boldsymbol{A_1}$	20	30	15
$\boldsymbol{A_2}$	75	20	35
$\boldsymbol{A_3}$	25	80	25
$\boldsymbol{A_4}$	85	5	45

Решение

1). Требуется применить критерий Гурвица, для которого (по определению) справедливо следующее выражение ($\chi=0.6$):

$$\boldsymbol{H} = \max_{1\le i\le m}\left\{\chi\cdot\min_{1\le j\le n} a_{ij} + (1-\chi)\cdot\max_{1\le j\le n} a_{ij}\right\},$$

т.е. в каждом столбце $|a_{ij}|$ выбирают минимальное значение $\boldsymbol{M}_i$ и максимальное значение $\boldsymbol{E}_i$, затем вычисляют значение $h_i = \chi\cdot\boldsymbol{M}_i + (1-\chi)\cdot\boldsymbol{E}_i$. Оптимальному решению соответствует то решение (т.е. стратегия $\boldsymbol{A_i}$ при $\boldsymbol{i=i^*}$ и $a_{i^*j^*}$), которому соответствует минимум h_i. В данной задаче n=3 и m=4.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M_1} = \min\{20, 30, \mathbf{15}\} = \mathbf{15}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M_2} = \min\{75, \mathbf{20}, 35\} = \mathbf{20}.$$

Для 3-й строки:

$$\boldsymbol{M_3} = \min\{\mathbf{25}, 80, \mathbf{25}\} = \mathbf{25}.$$

Для 4-й строки:

$$\boldsymbol{M_4} = \min\{85, \mathbf{5}, 45\} = \mathbf{5}.$$

3). Запишем полученные минимумы $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке в дополнительный столбец справа платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A}_i$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			Минимум в i-й строке
	$\mathbf{П}_1$	$\mathbf{П}_2$	$\mathbf{П}_3$	$\boldsymbol{M}_i$
$\boldsymbol{A}_1$	20	30	**15**	**15**
$\boldsymbol{A}_2$	75	**20**	35	**20**
$\boldsymbol{A}_3$	**25**	80	**25**	**25**
$\boldsymbol{A}_4$	85	**5**	45	**5**

4). Вычислим максимумы $\boldsymbol{E}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{E}_1 = \max\{20, \mathbf{30}, 15\} = \mathbf{30}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{E}_2 = \max\{\mathbf{75}, 20, 35\} = \mathbf{75}.$$

Для 3-й строки:

$$\boldsymbol{E}_3 = \max\{25, \mathbf{80}, 25\} = \mathbf{80}.$$

Для 4-й строки:

$$\boldsymbol{E}_4 = \max\{\mathbf{85}, 5, 45\} = \mathbf{85}.$$

5). Запишем полученные максимумы $\boldsymbol{E}_i$ по каждой строке в ещё один дополнительный столбец справа платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A}_i$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			Min	Max
	$\mathbf{П}_1$	$\mathbf{П}_2$	$\mathbf{П}_3$	$\boldsymbol{M}_i$	$\boldsymbol{E}_i$
$\boldsymbol{A}_1$	20	30	15	15	**30**
$\boldsymbol{A}_2$	75	20	35	20	**75**
$\boldsymbol{A}_3$	25	80	25	25	**80**
$\boldsymbol{A}_4$	85	5	45	5	**85**

6). Вычислим (при $\chi=0.6$) значения h_i для каждой строки платёжной матрицы ($h_i = 0.6 \cdot \boldsymbol{M}_i + (1-0.6) \cdot \boldsymbol{E}_i$).

Для 1-й строки:

$$h_1 = 0.6 \cdot 15 + (1-0.6) \cdot 30 = 9 + 12 = \mathbf{21}.$$

Для 2-й строки:

$$h_2 = 0.6 \cdot 20 + (1-0.6) \cdot 75 = 12 + 30 = \mathbf{42}.$$

Для 3-й строки:

$$h_3 = 0.6 \cdot 25 + (1-0.6) \cdot 80 = 15 + 32 = \mathbf{47}.$$

Для 4-й строки:

$$h_4 = 0.6 \cdot 5 + (1-0.6) \cdot 85 = 3 + 34 = \mathbf{37}.$$

7). Запишем полученные значения h_i для каждой строки в ещё один дополнительный столбец справа платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×3

	Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A}_i$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			Min	Max	$\boldsymbol{h}_i$
		П₁	**П₂**	**П₃**	$\boldsymbol{M}_i$	$\boldsymbol{E}_i$	
	$\boldsymbol{A}_1$	20	30	15	15	30	**21**
	$\boldsymbol{A}_2$	75	20	35	20	75	**42**
$\Rightarrow$	$\boldsymbol{A}_3$	25	80	25	25	80	**47**
	$\boldsymbol{A}_4$	85	5	45	5	85	**37**

8). Среди уже найденных значений h_i выберем тот из них, который максимален.

Получаем, что

$$\boldsymbol{H} = \max\{21, 42, \mathbf{47}, 37\} = \mathbf{47}.$$

9). Определим оптимальную стратегию, соответствующую $\boldsymbol{H}$.

Значению $\boldsymbol{H} = 47$ соответствует только одна стратегия — $\boldsymbol{A}_3$.

В соответствии с критерием Гурвица стратегия $\boldsymbol{A}_3$ является оптимальной.

10). И тем самым задача решена■

Пример 1.7 (см. и ср. [**2**, с. 204-205])

Используя критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица (при $\chi=0.6$), принять решение (выбрать стратегию) по каждому из этих критериев в случае следующей платёжной матрицы $|\boldsymbol{a_{ij}}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей 3×4

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			
	$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$	$\mathbf{П_4}$
$\boldsymbol{A_1}$	19	30	41	49
$\boldsymbol{A_2}$	50	38	10	20
$\boldsymbol{A_3}$	73	18	81	11

Решение

1). Требуется применить критерий Вальда, для которого (по определению) справедливо следующее выражение:

$$\boldsymbol{V} = \max_{1\le i\le m}\left\{\min_{1\le j\le n} a_{ij}\right\} = a_{\boldsymbol{i^*j^*}},$$

где в каждой строке матрицы $|a_{\boldsymbol{ij}}|$ выбирается <u>минимальное</u> значение. Оптимальному решению соответствует такое решение (т.е. стратегия $\boldsymbol{A_i}$ при $\boldsymbol{i=i^*}$), которому соответствует <u>максимум</u> этого минимума (т.е. $a_{\boldsymbol{i^*j^*}}$). В данной задаче n=4 и m=3.

Требуется применить критерий Сэвиджа, для которого (по определению) справедливо следующее выражение:

$$\boldsymbol{S} = \min_{1\le j\le n}\left\{\max_{1\le i\le m} r_{ij}\right\}, \qquad r_{ij} = \max_{1\le k\le m}\left\{a_{kj}\right\} - a_{ij},$$

т.е. в каждом столбце матрицы $|a_{\boldsymbol{ij}}|$ выбирается <u>максимальное</u> значение $\boldsymbol{D}_j$, затем вычисляется значение $r_{ij} = \boldsymbol{D}_j - a_{ij}$. Оптимальному решению соответствует такое решение (т.е. стратегия $\boldsymbol{A_i}$ при $\boldsymbol{i=i^*}$), которому соответствует <u>минимум</u> этого <u>максимума</u> (т.е. $a_{\boldsymbol{i^*j^*}}$). В данной задаче n=4 и m=3.

Требуется применить критерий Гурвица, для которого (по определению) справедливо следующее выражение (χ=0.6):

$$\boldsymbol{H} = \max_{1\le i\le m}\left\{\chi\cdot\min_{1\le j\le n} a_{ij} + (1-\chi)\cdot\max_{1\le j\le n} a_{ij}\right\},$$

т.е. в каждом столбце $|a_{ij}|$ выбирают <u>минимальное</u> значение $\boldsymbol{M}_i$ и <u>максимальное</u> значение $\boldsymbol{E}_i$, затем вычисляют значение $h_i = \chi\cdot\boldsymbol{M}_i + (1-\chi)\cdot\boldsymbol{E}_i$. Оптимальному решению соответствует то решение (т.е. стратегия $\boldsymbol{A_i}$ при $\boldsymbol{i=i^*}$ и $a_{i^*j^*}$), которому соответствует <u>минимум</u> h_i. В данной задаче n=3 и m=4.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M_1} = \min\{\mathbf{19}, 30, 41, 49\} = \mathbf{19}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M_2} = \min\{50, 38, \mathbf{10}, 20\} = \mathbf{10}.$$

Для 3-й строки:

$$\boldsymbol{M_3} = \min\{73, 18, 81, \mathbf{11}\} = \mathbf{11}.$$

3). Вычислим максимумы $\boldsymbol{E}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{E_1} = \max\{19, 30, 41, \mathbf{49}\} = \mathbf{49}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{E_2} = \max\{\mathbf{50}, 38, 10, 20\} = \mathbf{50}.$$

Для 3-й строки:

$$\boldsymbol{E_3} = \max\{73, 18, \mathbf{81}, 11\} = \mathbf{81}.$$

4). Вычислим (при χ=0.6) значения h_i для каждой строки платёжной матрицы ($h_i = 0.6\cdot\boldsymbol{M}_i + (1-0.6)\cdot\boldsymbol{E}_i$).

Для 1-й строки:

$$h_1 = 0.6\cdot 19 + (1-0.6)\cdot 49 = 11.4 + 19.6 = \mathbf{31}.$$

Для 2-й строки:

$$h_2 = 0.6\cdot 10 + (1-0.6)\cdot 50 = 6 + 20 = \mathbf{26}.$$

Для 3-й строки:

$$h_3 = 0.6 \cdot 11 + (1 - 0.6) \cdot 81 = 6.6 + 32.4 = \mathbf{39}.$$

5). Запишем полученные значения $\boldsymbol{M_i}$, $\boldsymbol{E_i}, h_i$ для каждой строки в соответствующий дополнительный столбец справа платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 3×4

	Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A_i}$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)				Min	Max	$\boldsymbol{h_i}$
		$\mathbf{П_1}$	$\mathbf{П_2}$	$\mathbf{П_3}$	$\mathbf{П_4}$	$\boldsymbol{M_i}$	$\boldsymbol{E_i}$	
$\Rightarrow$	$\boldsymbol{A_1}$	19	30	41	49	19	49	31
	$\boldsymbol{A_2}$	50	38	10	20	10	50	26
$\Rightarrow$	$\boldsymbol{A_3}$	73	18	81	11	11	81	39

6). Среди уже найденных минимумов $\boldsymbol{M_i}$ выберем тот из них, который максимален.

Получаем, что $a_{i^* j^*} = \{a_{11}\}$, так как

$$\boldsymbol{R} = \max\{\mathbf{19}, 10, 11\} = \mathbf{19}.$$

Определим оптимальную стратегию, соответствующую $\boldsymbol{R}$.

Значению $\boldsymbol{R}$=19 соответствует стратегия $\boldsymbol{A_1}$.

Согласно критерию Вальда стратегия $\boldsymbol{A_1}$ оптимальна. Этот критерий *очень осторожен*, так как ориентирован на *наихудшие* условия, среди которых отыскивается наилучший и гарантированный результат.

7). Среди уже найденных значений h_i выберем тот из них, который максимален.

Получаем, что

$$\boldsymbol{H} = \max\{31, 26, \mathbf{39}\} = \mathbf{39}.$$

Определим оптимальную стратегию, соответствующую $\boldsymbol{H}$.

Значению $\boldsymbol{H} = 39$ соответствует только одна стратегия — $\boldsymbol{A_3}$.

В соответствии с критерием Гурвица стратегия $\boldsymbol{A_3}$ является оптимальной.

8). Для критерия Сэвиджа вычислим максимумы $\boldsymbol{D}_j$ по каждому j-му столбцу платёжной матрицы, т.е.

$$\boldsymbol{D}_j = \max_{1 \le k \le m=3} \left\{ a_{kj} \right\}.$$

Для 1-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_1 = \max \left\{ 19, 50, \mathbf{73} \right\} = \mathbf{73}.$$

Для 2-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_2 = \max \left\{ 30, \mathbf{38}, 18 \right\} = \mathbf{38}.$$

Для 3-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_3 = \max \left\{ 41, 10, \mathbf{81} \right\} = \mathbf{81}.$$

Для 4-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_4 = \max \left\{ \mathbf{49}, 20, 11 \right\} = \mathbf{49}.$$

9). Для критерия Сэвиджа запишем полученные максимумы $\boldsymbol{D}_j$ по каждому j-му столбцу в дополнительную строку снизу платёжной матрицы (т.е. матрица выигрышей). Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 3×4

Варианты решений для ЛПР (стратегия $\boldsymbol{A}_i$)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			
	$П_1$	**$П_2$**	**$П_3$**	**$П_4$**
$\boldsymbol{A}_1$	19	30	41	49
$\boldsymbol{A}_2$	50	38	10	20
$\boldsymbol{A}_3$	73	18	81	11
Максимумы $\boldsymbol{D}_j$ по каждому j-му столбцу	**73**	**38**	**81**	**49**

10). Для критерия Сэвиджа перейдём от матрицы выигрышей к матрице рисков. Для этого вычислим все элементы матрицы рисков по следующей формуле:

$$r_{ij} = \boldsymbol{D}_j - a_{ij}$$

и получим следующую матрицу рисков:

Матрица рисков 3×4

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация Π_j)				Max
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	W_i
A_1	54	8	40	0	
A_2	23	0	71	29	
A_3	0	20	0	38	

В этой матрице рисков пока ещё не заполнен последний столбец со значениями W_i.

11). Вычислим максимумы W_i по каждой строке матрицы рисков.

Для 1-й строки:

$$W_1 = \max\left\{\mathbf{54}, 8, 40, 0\right\} = \mathbf{54}.$$

Для 2-й строки:

$$W_2 = \max\left\{23, 0, \mathbf{71}, 29\right\} = \mathbf{71}.$$

Для 3-й строки:

$$W_3 = \max\left\{0, 20, 0, \mathbf{38}\right\} = \mathbf{38}.$$

12). Запишем полученный результат W_i в дополнительный столбец справа матрицы рисков. Получим следующую таблицу:

Матрица рисков 3×4

	Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация Π_j)				Max
		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	W_i
	A_1	54	8	40	0	**54**
	A_2	23	0	71	29	**71**
$\Rightarrow$	A_3	0	20	0	38	**38**

13). Среди уже найденных максимумов W_i выберем тот из них, который минимален.

Получаем что

$$Q = \min\{54, 71, \mathbf{38}\} = \mathbf{38}.$$

14). Определим оптимальную стратегию, соответствующую Q.

Значению Q=38 соответствует одна стратегия — A_3.

В соответствии с критерием Сэвиджа стратегия A_3 является оптимальной. Таким образом, выбрано такое решение (стратегия A_3), при котором величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной (т.е. когда максимален риск) ситуации.

15). Запишем полученные результаты по выбору оптимальной стратегии в следующую таблицу:

Оптимальные стратегии для 3-х критериев

Критерий	Оптимальная стратегия для ЛПР
Вальда	A_1
Гурвица	A_3
Сэвиджа	A_3

Таким образом, оптимальная стратегия согласно критерию Вальда есть A_1.

С точки зрения критериев Гурвица и Сэвиджа, оптимальной стратегией является A_3.

Важно отметить, что на практике возможны различные случаи. В частности, возможен случай, когда все три критерия (Вальда, Сэвиджа, Гурвица) указывают на одну и ту же стратегию. При этом не исключён и случай, когда все три эти критерия указывают на три разных стратегии. Конечно, трудно ожидать, что все три критерия укажут только на одну-единственную стратегию, хотя это и не исключено и может иметь место на практике.

16). И тем самым задача решена■

Пример 1.8

Используя критерии Байеса (Лапласа), принять решение (выбрать стратегию) по этому критериев в случае следующей платёжной матрицы $|\boldsymbol{a}_{ij}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей 4×4

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация $\mathbf{П}_j$)			
	$\mathbf{П}_1$	$\mathbf{П}_2$	$\mathbf{П}_3$	$\mathbf{П}_4$
A_1	1	3	1	1
A_2	3	1	1	2
A_3	2	1	1	1
A_4	1	3	0	4

Решение

1). Требуется применить критерий Байеса (Лапласа), для которого (по определению) справедливо следующее выражение:

$$\boldsymbol{L} = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\},$$

где в каждой строке матрицы $|a_{ij}|$ подсчитывается среднее арифметическое значение величин $\boldsymbol{a}_{ij}$. Оптимальному решению соответствует такое решение (т.е. стратегия $\boldsymbol{A}_i$ при $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}^*$), которому соответствует <u>максимум</u> этого среднего значения (т.е. $a_{i^* j^*}$). В данной задаче n=4 и m=4.

2). Вычислим сумму $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке матрицы выигрышей.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M}_1 = 1 + 3 + 1 + 1 = \mathbf{6}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M}_2 = 3 + 1 + 1 + 2 = \mathbf{7}.$$

Для 3-й строки:

$$\boldsymbol{M}_3 = 2 + 1 + 1 + 1 = \mathbf{5}.$$

Для 4-й строки:

$$\boldsymbol{M}_4 = 1 + 3 + 0 + 4 = \mathbf{8}.$$

3). Запишем полученный результат M_i в дополнительный столбец справа матрицы выигрышей. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×4

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация Π_j)				M_i
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	
A_1	1	3	1	1	**6**
A_2	3	1	1	2	**7**
A_3	2	1	1	1	**5**
A_4	1	3	0	4	**8**

4). Вычислим среднее значение E_i по каждой строке матрицы выигрышей. Полученный результат запишем в дополнительный столбец справа матрицы выигрышей. Получим следующую таблицу:

Матрица выигрышей 4×4

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация Π_j)				L_i	
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4		
A_1	1	3	1	1	**1.50**	
A_2	3	1	1	2	**1.75**	
A_3	2	1	1	1	**1.25**	
A_4	1	3	0	4	**2.0**	$\Leftarrow$

5). Вычислим критерий Байеса (Лапласа).

Воспользуемся следующим выражением:

$$\boldsymbol{L} = \max_{1 \le i \le m=4} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} a_{ij} \right\} = \max_{1 \le i \le m=4} \{L_i\} = \max \{1.50; 1.75; 1.25; \mathbf{2.0}\} = \mathbf{2.0}$$

и получим окончательный результат:

Значению $\boldsymbol{L}$=**2.0** соответствует стратегия A_4.

Таким образом, оптимальная стратегия согласно критерию Байеса (Лапласа) есть A_4.

6). И тем самым задача решена■

Пример 1.9 (см. и ср. [**2**, с. 180-181])

Проверить наличие седловой точки и решить игру, т.е. найти оптимальные стратегии для двух игроков $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 3×4

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$			
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_4$
$\boldsymbol{A}_1$	2	4	7	5
$\boldsymbol{A}_2$	7	6	8	7
$\boldsymbol{A}_3$	5	3	4	1

Решение

1). Найдём *нижнюю цену игры* $\boldsymbol{\alpha}$ (максимин) по формуле

$$\boldsymbol{\alpha} = \max_{1 \le i \le m} \left(\min_{1 \le j \le n} \left\{ a_{ij} \right\} \right).$$

В данной задаче m=3 и n=4.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M}_1 = \min\left\{\mathbf{2}, 4, 7, 5\right\} = \mathbf{2}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M}_2 = \min\left\{7, \mathbf{6}, 8, 7\right\} = \mathbf{6}.$$

Для 3-й строки:

$$\boldsymbol{M}_3 = \min\left\{5, 3, 4, \mathbf{1}\right\} = \mathbf{1}.$$

3). Запишем полученный результат $\boldsymbol{M}_i$ в дополнительный столбец справа платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 3×4

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$				$\boldsymbol{M}_i$
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_4$	
$\boldsymbol{A}_1$	2	4	7	5	**2**
$\boldsymbol{A}_2$	7	6	8	7	**6**
$\boldsymbol{A}_3$	5	3	4	1	**1**

Тогда *нижняя цена игры* $\boldsymbol{\alpha} = \max\left\{2, \mathbf{6}, 1\right\} = \mathbf{6}$.

4). Найдём *верхнюю цену игры* **β** (минимакс) по следующей формуле (n=4 и m=3):

$$\boldsymbol{\beta} = \min_{1 \le j \le n} \left(\max_{1 \le i \le m} \left\{ a_{ij} \right\} \right).$$

5). Вычислим максимум $\boldsymbol{D}_j$ в каждом столбце платёжной матрицы:

$$\boldsymbol{D}_j = \max_{1 \le k \le m=3} \left\{ a_{kj} \right\}.$$

Для 1-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_1 = \max \left\{ 2, \mathbf{7}, 5 \right\} = \mathbf{7}.$$

Для 2-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_2 = \max \left\{ 4, \mathbf{6}, 3 \right\} = \mathbf{6}.$$

Для 3-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_3 = \max \left\{ 7, \mathbf{8}, 4 \right\} = \mathbf{8}.$$

Для 4-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_4 = \max \left\{ 5, \mathbf{7}, 1 \right\} = \mathbf{7}.$$

6). Запишем полученный результат $\boldsymbol{D}_j$ в дополнительную строку снизу платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 3×4

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$				$\boldsymbol{M}_i$
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_4$	
$\boldsymbol{A}_1$	2	4	7	5	**2**
$\boldsymbol{A}_2$	7	6	8	7	**6** ⇐
$\boldsymbol{A}_3$	5	3	4	1	**1**
$\boldsymbol{D}_j$	**7**	**6** ⇑	**8**	**7**	—

Тогда $\boldsymbol{\beta} = \min \left\{ \mathbf{7}, \mathbf{6}, 8, 7 \right\} = \mathbf{6}$.

7). Установление наличия седловой точки.

Так как для (**1.1**) **α** = **β** = **6**, то имеется седловая точка $a_{22} = 6$, которой соответствует стратегия $\boldsymbol{A}_2$ для игрока $\boldsymbol{A}$ и стратегия $\boldsymbol{B}_2$ для игрока $\boldsymbol{B}$. Оптимальному решению соответствует стратегия $\boldsymbol{A}_2$ для игрока $\boldsymbol{A}$ и стратегия $\boldsymbol{B}_2$ для игрока $\boldsymbol{B}$.

8). И тем самым задача решена■

Пример 1.10 (см. и ср. [**2**, с. 186-187])

Упростить игру. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 5×5

Стратегии $\boldsymbol{A_i}$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$				
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$	$\boldsymbol{B_5}$
$\boldsymbol{A_1}$	4	7	2	3	4
$\boldsymbol{A_2}$	3	5	6	8	9
$\boldsymbol{A_3}$	4	4	2	2	8
$\boldsymbol{A_4}$	3	6	1	2	4
$\boldsymbol{A_5}$	3	5	6	8	9

Решение

1). Поиск дублирующих стратегий для игрока $\boldsymbol{A}$.

Заметим, что стратегия $\boldsymbol{A_2}$ дублирует стратегию $\boldsymbol{A_5}$. Тогда применим ***Правило 1.2*** — отбросим (т.е. удалим) любую из них, например, $\boldsymbol{A_5}$. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 4×5

Стратегии $\boldsymbol{A_i}$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$				
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$	$\boldsymbol{B_5}$
$\boldsymbol{A_1}$	4	7	2	3	4
$\boldsymbol{A_2}$	3	5	6	8	9
$\boldsymbol{A_3}$	4	4	2	2	8
$\boldsymbol{A_4}$	3	6	1	2	4

2). Поиск доминирующих стратегий для игрока $\boldsymbol{A}$.

Заметим, что в строке для стратегии $\boldsymbol{A_1}$ все выигрыши игрока $\boldsymbol{A}$ больше или равны соответствующим выигрышам строки со стратегией $\boldsymbol{A_4}$. Получается, что стратегия $\boldsymbol{A_1}$ доминирует над стратегией $\boldsymbol{A_4}$. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией $\boldsymbol{A_4}$ для игрока $\boldsymbol{A}$.

В итоге этой операции получим очередную более сокращённую таблицу:

Платёжная матрица игры 3×5

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$				
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_4$	$\boldsymbol{B}_5$
$\boldsymbol{A}_1$	4	7	2	3	4
$\boldsymbol{A}_2$	3	5	6	8	9
$\boldsymbol{A}_3$	4	4	2	2	8

3). Поиск дублирующих стратегий для игрока ***B***.

Анализ столбцов текущей платёжной матрицы игры 3×5 показывает, что отсутствуют дублирующие стратегии для игрока ***B***. Поэтому ничего удалять в текущей платёжной матрице не следует.

4). Поиск доминирующих стратегий для игрока ***B***.

Заметим, что в столбце для стратегии $\boldsymbol{B}_1$ все проигрыши игрока ***B*** меньше или равны соответствующим проигрышам строки со стратегией $\boldsymbol{B}_2$. Получается, что стратегия $\boldsymbol{B}_1$ доминирует над стратегией $\boldsymbol{B}_2$. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией $\boldsymbol{B}_2$ для игрока ***B***. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 3×4

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$			
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_4$	$\boldsymbol{B}_5$
$\boldsymbol{A}_1$	4	2	3	4
$\boldsymbol{A}_2$	3	6	8	9
$\boldsymbol{A}_3$	4	2	2	8

Заметим, что в столбце для стратегии $\boldsymbol{B}_3$ все проигрыши игрока ***B*** меньше или равны соответствующим проигрышам строки со стратегией $\boldsymbol{B}_4$. Получается, что стратегия $\boldsymbol{B}_3$ доминирует над стратегией $\boldsymbol{B}_4$. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией $\boldsymbol{B}_4$ для игрока ***B***. В итоге этой операции получим очередную более сокращённую таблицу:

Платёжная матрица игры 3×3

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$		
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_5}$
$\boldsymbol{A_1}$	4	2	4
$\boldsymbol{A_2}$	3	6	9
$\boldsymbol{A_3}$	4	2	8

Заметим, что в столбце для стратегии $\boldsymbol{B_3}$ все проигрыши игрока $\boldsymbol{B}$ меньше или равны соответствующим проигрышам строки со стратегией $\boldsymbol{B_5}$. Получается, что стратегия $\boldsymbol{B_3}$ доминирует над стратегией $\boldsymbol{B_5}$. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией $\boldsymbol{B_5}$ для игрока $\boldsymbol{B}$. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 3×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$	
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_3}$
$\boldsymbol{A_1}$	4	2
$\boldsymbol{A_2}$	3	6
$\boldsymbol{A_3}$	4	2

5). Повторный поиск дублирующих стратегий для игрока $\boldsymbol{A}$.
Заметим, что стратегия $\boldsymbol{A_3}$ дублирует стратегию $\boldsymbol{A_1}$. Тогда применим ***Правило 1.2*** — отбросим (т.е. удалим) любую из них, например $\boldsymbol{A_3}$. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$	
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_3}$
$\boldsymbol{A_1}$	4	2
$\boldsymbol{A_2}$	3	6

Далее упрощать игру больше некуда.
6). И тем самым задача решена■

Пример 1.11

Упростить игру. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 7×4

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$			
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$
$\boldsymbol{A_1}$	2	5	1	2
$\boldsymbol{A_2}$	2	2	1	2
$\boldsymbol{A_3}$	2	2	0	2
$\boldsymbol{A_4}$	1	4	1	1
$\boldsymbol{A_5}$	1	3	4	1
$\boldsymbol{A_6}$	2	5	1	2
$\boldsymbol{A_7}$	1	3	4	1

Решение

1). Поиск дублирующих стратегий для игрока $\boldsymbol{A}$.

Заметим, что стратегия $\boldsymbol{A_1}$ дублирует стратегию $\boldsymbol{A_6}$. Тогда применим ***Правило 1.2*** — отбросим (т.е. удалим) любую из них, например $\boldsymbol{A_6}$. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 6×4

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$			
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$
$\boldsymbol{A_1}$	2	5	1	2
$\boldsymbol{A_2}$	2	2	1	2
$\boldsymbol{A_3}$	2	2	0	2
$\boldsymbol{A_4}$	1	4	1	1
$\boldsymbol{A_5}$	1	3	4	1
$\boldsymbol{A_7}$	1	3	4	1

Заметим, что стратегия $\boldsymbol{A_5}$ дублирует стратегию $\boldsymbol{A_7}$. Тогда применим ***Правило 1.2*** — отбросим (т.е. удалим) любую из них, например $\boldsymbol{A_7}$.

Получим очередную таблицу:

Платёжная матрица игры 5×4

Стратегии $\boldsymbol{A_i}$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B_i}$ для игрока $\boldsymbol{B}$			
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$
$\boldsymbol{A_1}$	2	5	1	2
$\boldsymbol{A_2}$	2	2	1	2
$\boldsymbol{A_3}$	2	2	0	2
$\boldsymbol{A_4}$	1	4	1	1
$\boldsymbol{A_5}$	1	3	4	1

2). Поиск доминирующих стратегий для игрока $\boldsymbol{A}$.

Заметим, что в строке для стратегии $\boldsymbol{A_1}$ все выигрыши игрока $\boldsymbol{A}$ больше или равны соответствующим выигрышам строки со стратегией $\boldsymbol{A_4}$. Получается, что стратегия $\boldsymbol{A_1}$ доминирует над стратегией $\boldsymbol{A_4}$. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией $\boldsymbol{A_4}$ для игрока $\boldsymbol{A}$. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 4×4

Стратегии $\boldsymbol{A_i}$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B_i}$ для игрока $\boldsymbol{B}$			
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$
$\boldsymbol{A_1}$	2	5	1	2
$\boldsymbol{A_2}$	2	2	1	2
$\boldsymbol{A_3}$	2	2	0	2
$\boldsymbol{A_5}$	1	3	4	1

Заметим, что в строке для стратегии $\boldsymbol{A_1}$ все выигрыши игрока $\boldsymbol{A}$ больше или равны соответствующим выигрышам строки со стратегией $\boldsymbol{A_2}$. Получается, что стратегия $\boldsymbol{A_1}$ доминирует над стратегией $\boldsymbol{A_2}$. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией $\boldsymbol{A_2}$ для игрока $\boldsymbol{A}$.

Получим очередную таблицу:

Платёжная матрица игры 3×4

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$			
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_4$
$\boldsymbol{A}_1$	2	5	1	2
$\boldsymbol{A}_3$	2	2	0	2
$\boldsymbol{A}_5$	1	3	4	1

Заметим, что в строке для стратегии $\boldsymbol{A}_1$ все выигрыши игрока $\boldsymbol{A}$ больше или равны соответствующим выигрышам строки со стратегией $\boldsymbol{A}_3$. Получается, что стратегия $\boldsymbol{A}_1$ доминирует над стратегией $\boldsymbol{A}_3$. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией $\boldsymbol{A}_3$ для игрока $\boldsymbol{A}$. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×4

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$			
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_4$
$\boldsymbol{A}_1$	2	5	1	2
$\boldsymbol{A}_5$	1	3	4	1

3). Поиск дублирующих стратегий для игрока $\boldsymbol{B}$.

Анализ столбцов текущей платёжной матрицы игры 2×4 показывает, что имеются дублирующие стратегии для игрока $\boldsymbol{B}$.

Заметим, что стратегия $\boldsymbol{B}_1$ дублирует стратегию $\boldsymbol{B}_4$. Тогда применим ***Правило 1.2*** — отбросим (т.е. удалим) любую из них, например $\boldsymbol{B}_4$. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×3

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$		
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$
$\boldsymbol{A}_1$	2	5	1
$\boldsymbol{A}_5$	1	3	4

4). Поиск доминирующих стратегий для игрока ***B***.

Заметим, что в столбце для стратегии $\boldsymbol{B_1}$ все проигрыши игрока ***B*** меньше или равны соответствующим проигрышам строки со стратегией $\boldsymbol{B_2}$. Получается, что стратегия $\boldsymbol{B_1}$ доминирует над стратегией $\boldsymbol{B_2}$. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией $\boldsymbol{B_2}$ для игрока ***B***. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***	
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_3}$
$\boldsymbol{A_1}$	2	1
$\boldsymbol{A_5}$	1	4

5). Повторный поиск дублирующих стратегий для игрока ***A***.

Анализ строк текущей платёжной матрицы игры 2×2 показывает, что отсутствуют дублирующие стратегии для игрока ***A***. Поэтому ничего удалять в текущей платёжной матрице не следует.

6). Повторный поиск доминирующих стратегий для игрока ***A***.

Анализ строк текущей платёжной матрицы игры 2×2 показывает, что отсутствуют доминирующие стратегии для игрока ***A***. Поэтому ничего удалять в текущей платёжной матрице не следует.

В заключение получим итоговую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***	
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_3}$
$\boldsymbol{A_1}$	2	1
$\boldsymbol{A_5}$	1	4

Далее упрощать игру больше некуда.

7). И тем самым задача решена■

Пример 1.12

Упростить игру. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 7×5

Стратегии A_i для игрока A	Стратегии B_i для игрока B				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	8	4	8	3
A_2	5	5	4	6	2
A_3	5	8	4	8	3
A_4	4	7	4	8	3
A_5	4	6	4	8	3
A_6	4	6	4	8	3
A_7	5	5	3	5	5

Решение

1). Поиск дублирующих стратегий для игрока A.

Заметим, что стратегия A_1 дублирует стратегию A_3. Тогда применим ***Правило 1.2*** — отбросим (т.е. удалим) любую из них, например A_3. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 6×5

Стратегии A_i для игрока A	Стратегии B_i для игрока B				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	8	4	8	3
A_2	5	5	4	6	2
A_4	4	7	4	8	3
A_5	4	6	4	8	3
A_6	4	6	4	8	3
A_7	5	5	3	5	5

Заметим, что стратегия A_5 дублирует стратегию A_6. Тогда применим ***Правило 1.2*** — отбросим (т.е. удалим) любую из них, например A_6.

Получим очередную таблицу:

Платёжная матрица игры 5×5

Стратегии A_i для игрока A	Стратегии B_i для игрока B				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	8	4	8	3
A_2	5	5	4	6	2
A_4	4	7	4	8	3
A_5	4	6	4	8	3
A_7	5	5	3	5	5

2). Поиск доминирующих стратегий для игрока A.

Заметим, что в строке для стратегии A_1 все выигрыши игрока A больше или равны соответствующим выигрышам строки со стратегией A_4. Получается, что стратегия A_1 доминирует над стратегией A_4. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией A_4 для игрока A. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 4×5

Стратегии A_i для игрока A	Стратегии B_i для игрока B				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	8	4	8	3
A_2	5	5	4	6	2
A_5	4	6	4	8	3
A_7	5	5	3	5	5

Заметим, что в строке для стратегии A_1 все выигрыши игрока A больше или равны соответствующим выигрышам строки со стратегией A_2. Получается, что стратегия A_1 доминирует над стратегией A_2. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией A_2 для игрока A.

Получим очередную таблицу:

Платёжная матрица игры 3×5

Стратегии A_i для игрока A	Стратегии B_i для игрока B				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	8	4	8	3
A_5	4	6	4	8	3
A_7	5	5	3	5	5

Заметим, что в строке для стратегии A_1 все выигрыши игрока A больше или равны соответствующим выигрышам строки со стратегией A_5. Получается, что стратегия A_1 доминирует над стратегией A_5. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией A_5 для игрока A. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×5

Стратегии A_i для игрока A	Стратегии B_i для игрока B				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	8	4	8	3
A_7	5	5	3	5	5

3). Поиск дублирующих стратегий для игрока B.

Анализ столбцов текущей платёжной матрицы игры 2×4 показывает, что имеются дублирующие стратегии для игрока B.

Заметим, что стратегия B_2 дублирует стратегию B_4. Тогда применим ***Правило 1.2*** — отбросим (т.е. удалим) любую из них, например B_4. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×4

Стратегии A_i для игрока A	Стратегии B_i для игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_5
A_1	5	8	4	3
A_7	5	5	3	5

4). Поиск доминирующих стратегий для игрока ***B***.

Заметим, что в столбце для стратегии $\boldsymbol{B_1}$ <u>все</u> проигрыши игрока ***B*** меньше или равны соответствующим проигрышам строки со стратегией $\boldsymbol{B_2}$. Получается, что стратегия $\boldsymbol{B_1}$ <u>доминирует</u> над стратегией $\boldsymbol{B_2}$. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией $\boldsymbol{B_2}$ для игрока ***B***. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×3

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***		
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_5}$
$\boldsymbol{A_1}$	5	4	3
$\boldsymbol{A_7}$	5	3	5

Заметим, что в столбце для стратегии $\boldsymbol{B_3}$ <u>все</u> проигрыши игрока ***B*** меньше или равны соответствующим проигрышам строки со стратегией $\boldsymbol{B_1}$. Получается, что стратегия $\boldsymbol{B_3}$ <u>доминирует</u> над стратегией $\boldsymbol{B_1}$. Тогда применим ***Правило 1.1*** — вычеркнем (т.е. удалим) из платёжной матрицы строку с заведомо невыгодной стратегией $\boldsymbol{B_1}$ для игрока ***B***. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***	
	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_5}$
$\boldsymbol{A_1}$	4	3
$\boldsymbol{A_7}$	3	5

5). Повторный анализ стратегий для игрока ***A***.

Анализ строк текущей платёжной матрицы игры 2×2 показывает, что <u>отсутствуют</u> дублирующие и доминирующие стратегии для игрока ***A***.

Далее упрощать игру больше некуда.

7). И тем самым задача решена■

Пример 1.13 (см. и ср. [**47**, с. 26-27])

Проверить наличие седловой точки и решить игру, т.е. найти оптимальные стратегии для двух игроков $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$	
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$
$\boldsymbol{A_1}$	1	–1
$\boldsymbol{A_2}$	–1	1

Решение

1). Найдём *нижнюю цену игры* $\boldsymbol{\alpha}$ (максимин) по формуле

$$\boldsymbol{\alpha} = \max_{1 \le i \le m} \left(\min_{1 \le j \le n} \left\{ a_{ij} \right\} \right).$$

В данной задаче m=2 и n=2.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M_1} = \min\left\{ +1, \mathbf{-1} \right\} = \mathbf{-1}.$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M_2} = \min\left\{ \mathbf{-1}, +1 \right\} = \mathbf{-1}.$$

3). Запишем полученный результат $\boldsymbol{M}_i$ в дополнительный столбец справа платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$		$\boldsymbol{M}_i$
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	
$\boldsymbol{A_1}$	1	–1	**–1**
$\boldsymbol{A_2}$	–1	1	**–1**

Тогда *нижняя цена игры* $\boldsymbol{\alpha} = \max\left\{-1, -1\right\} = \mathbf{-1}$.

4). Найдём *верхнюю цену игры* **β** (минимакс) по следующей формуле (n=2 и m=2):

$$\boldsymbol{\beta}=\min_{1\le j\le n}\left(\max_{1\le i\le m}\left\{a_{ij}\right\}\right).$$

5). Вычислим максимум $\boldsymbol{D}_j$ в каждом столбце платёжной матрицы:

$$\boldsymbol{D}_j=\max_{1\le k\le m=2}\left\{a_{kj}\right\}.$$

Для 1-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{1}}=\max\left\{+\mathbf{1},-1\right\}=+\mathbf{1}.$$

Для 2-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{2}}=\max\left\{-1,+\mathbf{1}\right\}=+\mathbf{1}.$$

6). Запишем полученный результат $\boldsymbol{D}_j$ в дополнительную строку снизу платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$		$\boldsymbol{M}_i$
	$\boldsymbol{B}_{\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{B}_{\mathbf{2}}$	
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}$	1	–1	**–1**
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}$	–1	1	**–1**
$\boldsymbol{D}_j$	**+1**	**+1**	—

Тогда *верхняя цена игры* **β** $=\min\left\{+1,+1\right\}=+\mathbf{1}$.

7). Установление наличия седловой точки.

Так как для (**1.1**) **α ≠ β**, поскольку $\boldsymbol{\alpha}=-\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\beta}=+\mathbf{1}$, то нет седловой точки. Поэтому далее решение игры будем искать среди смешанных стратегий для игроков $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

8). Поиск смешанных стратегий в игре без седловой точки.

Замечаем (см. табл. **1.1**), что в данной игре для платёжной матрицы справедливо следующее:

$$a_{11}=1;$$
$$a_{12}=-1;$$
$$a_{21}=-1;$$
$$a_{22}=1.$$

Из формулы (**1.2**) находим p_1:

$$p_1 = \frac{\left(a_{22} - a_{21}\right)}{\left(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}\right)}$$

или

$$p_1 = \frac{\left(1-(-1)\right)}{\left(1+1-(-1)-(-1)\right)} = \frac{1+1}{1+1+1+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad p_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Из формулы (**1.5**) находим q_1:

$$q_1 = \frac{\left(a_{22} - a_{12}\right)}{\left(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}\right)}$$

или

$$q_1 = \frac{\left(1-(-1)\right)}{\left(1+1-(-1)-(-1)\right)} = \frac{1+1}{1+1+1+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad q_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Из формулы (**1.4**) находим цену игры **ν**:

$$\nu = \frac{\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)}{\left(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}\right)}$$

или

$$\nu = \frac{\left(1\cdot 1-(-1)\cdot(-1)\right)}{\left(1+1-(-1)-(-1)\right)} = \frac{1-1}{1+1+1+1} = \frac{0}{4} = 0$$

Тогда решению игры в смешанных стратегиях соответствуют

оптимальное решение стороны игрока ***A*** — $S_A^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

оптимальное решение стороны игрока ***B*** — $S_B^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Оптимальная стратегия каждого игрока — случайным образом (с частотой 0.5) чередовать обе свои чистые стратегии.

9). И тем самым задача решена■

Пример 1.14

Проверить наличие седловой точки и решить игру, т.е. найти оптимальные стратегии для двух игроков ***A*** и ***B***. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***	
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$
$\boldsymbol{A_1}$	4	2
$\boldsymbol{A_2}$	6	1

Решение

1). Найдём *нижнюю цену игры* **α** (максимин) по формуле

$$\boldsymbol{\alpha} = \max_{1 \le i \le m} \left(\min_{1 \le j \le n} \left\{ a_{ij} \right\} \right).$$

В данной задаче m=2 и n=2.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M_1} = \min\left\{\ 4, \mathbf{2}\right\} = \mathbf{2}\ .$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M_2} = \min\left\{6, \mathbf{1}\right\} = \mathbf{1}\ .$$

3). Запишем полученный результат $\boldsymbol{M}_i$ в дополнительный столбец справа платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***		$\boldsymbol{M}_i$
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	
$\boldsymbol{A_1}$	4	2	**2**
$\boldsymbol{A_2}$	6	1	**1**

Тогда *нижняя цена игры* **α** = $\max\left\{\mathbf{2}, 1\right\} = \mathbf{2}$.

4). Найдём *верхнюю цену игры* **β** (минимакс) по следующей формуле (n=2 и m=2):

$$\boldsymbol{\beta} = \min_{1 \le j \le n} \left(\max_{1 \le i \le m} \left\{ a_{ij} \right\} \right).$$

5). Вычислим максимум $\boldsymbol{D_j}$ в каждом столбце платёжной матрицы:

$$\boldsymbol{D}_j = \max_{1 \le k \le m = 2} \left\{ a_{kj} \right\}.$$

Для 1-го столбца:

$$\boldsymbol{D_1} = \max \left\{ 4, \mathbf{6} \right\} = \mathbf{6}.$$

Для 2-го столбца:

$$\boldsymbol{D_2} = \max \left\{ \mathbf{2}, 1 \right\} = \mathbf{2}.$$

6). Запишем полученный результат $\boldsymbol{D_j}$ в дополнительную строку снизу платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A_i}$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B_i}$ для игрока $\boldsymbol{B}$		$\boldsymbol{M_i}$
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	
$\boldsymbol{A_1}$	4	2	**2** ⇐
$\boldsymbol{A_2}$	6	1	**1**
$\boldsymbol{D_j}$	**6**	**2** ⇑	—

Тогда *верхняя цена игры* **β** = $\min\left\{6, \mathbf{2}\right\} = \mathbf{2}$.

7). Установление наличия седловой точки.

Так как для (**1.1**) выполнимо **α** = **β**, поскольку **α**= **2**, **β** = **2**, то имеется в наличии для данной игры седловая точка $a_{12} = 2$, которой соответствует стратегия $\boldsymbol{A_1}$ для игрока $\boldsymbol{A}$ и стратегия $\boldsymbol{B_2}$ для игрока $\boldsymbol{B}$.

Оптимальному решению соответствует стратегия $\boldsymbol{A_1}$ для игрока $\boldsymbol{A}$ и стратегия $\boldsymbol{B_2}$ для игрока $\boldsymbol{B}$.

8). И тем самым задача решена■

Пример 1.15 (см. и ср. [**34**, с. 216-217])

Проверить наличие седловой точки и решить игру, т.е. найти оптимальные стратегии для двух игроков ***A*** и ***B***. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***	
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$
$\boldsymbol{A_1}$	2	2
$\boldsymbol{A_2}$	1	3

Решение

1). Найдём *нижнюю цену игры* **α** (максимин) по формуле

$$\boldsymbol{\alpha} = \max_{1 \le i \le m} \left(\min_{1 \le j \le n} \left\{ a_{ij} \right\} \right).$$

В данной задаче m=2 и n=2.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M_1} = \min \left\{ \mathbf{2}, \mathbf{2} \right\} = \mathbf{2}\ .$$

Для 2-й строки:

$$\boldsymbol{M_2} = \min \left\{ \mathbf{1}, 3 \right\} = \mathbf{1}\ .$$

3). Запишем полученный результат $\boldsymbol{M}_i$ в дополнительный столбец справа платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***		$\boldsymbol{M}_i$
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	
$\boldsymbol{A_1}$	2	2	**2**
$\boldsymbol{A_2}$	1	3	**1**

Тогда *нижняя цена игры* $\boldsymbol{\alpha} = \max \left\{ \mathbf{2}, 1 \right\} = \mathbf{2}\ .$

4). Найдём *верхнюю цену игры* **β** (минимакс) по следующей формуле (n=2 и m=2):

$$\boldsymbol{\beta} = \min_{1 \le j \le n} \left(\max_{1 \le i \le m} \left\{ a_{ij} \right\} \right).$$

5). Вычислим максимум $\boldsymbol{D}_j$ в каждом столбце платёжной матрицы:

$$\boldsymbol{D}_j = \max_{1 \le k \le m=2} \left\{ a_{kj} \right\}.$$

Для 1-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_1 = \max \left\{ \mathbf{2}, 1 \right\} = \mathbf{2}.$$

Для 2-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_2 = \max \left\{ 2, \mathbf{3} \right\} = \mathbf{3}.$$

6). Запишем полученный результат $\boldsymbol{D}_j$ в дополнительную строку снизу платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$		$\boldsymbol{M}_i$	
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$		
$\boldsymbol{A}_1$	2	2	**2**	$\Leftarrow$
$\boldsymbol{A}_2$	1	3	**1**	
$\boldsymbol{D}_j$	**2**	**3**	—	
	$\Uparrow$			

Тогда *верхняя цена игры* $\boldsymbol{\beta} = \min \left\{ \mathbf{2}, 3 \right\} = \mathbf{2}$.

7). Установление наличия седловой точки.

Так как для (**1.1**) выполнимо **α** = **β**, поскольку **α**= **2**, **β** = **2**, то седловая точка $a_{11} = 2$ имеется, и ей соответствует стратегия $\boldsymbol{A}_1$ для игрока $\boldsymbol{A}$ и стратегия $\boldsymbol{B}_1$ для игрока $\boldsymbol{B}$.

Оптимальному решению соответствует стратегия $\boldsymbol{A}_1$ для игрока $\boldsymbol{A}$ и стратегия $\boldsymbol{B}_1$ для игрока $\boldsymbol{B}$.

8). И тем самым задача решена■

Пример 1.16

Проверить наличие седловой точки и решить игру, т.е. найти оптимальные стратегии для двух игроков ***A*** и ***B***. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 1×1

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***
	$\boldsymbol{B}_1$
$\boldsymbol{A}_1$	18

Решение

1). Найдём *нижнюю цену игры* $\boldsymbol{\alpha}$ (максимин) по формуле

$$\boldsymbol{\alpha} = \max_{1 \le i \le m} \left(\min_{1 \le j \le n} \left\{ a_{ij} \right\} \right).$$

В данной задаче m=1 и n=1.

2). Вычислим минимум $\boldsymbol{M}_i$ по каждой строке платёжной матрицы.

Для 1-й строки:

$$\boldsymbol{M}_1 = \min\left\{\mathbf{18}\right\} = \mathbf{18}.$$

3). Запишем полученный результат $\boldsymbol{M}_i$ в дополнительный столбец справа платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 1×1

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***	$\boldsymbol{M}_i$
	$\boldsymbol{B}_1$	
$\boldsymbol{A}_1$	18	**18**

Тогда *нижняя цена игры* $\boldsymbol{\alpha} = \max\left\{\mathbf{18}\right\} = \mathbf{18}$.

4). Найдём *верхнюю цену игры* $\boldsymbol{\beta}$ (минимакс) по следующей формуле (n=1 и m=1):

$$\boldsymbol{\beta}=\min_{1\le j\le n}\left(\max_{1\le i\le m}\left\{a_{ij}\right\}\right).$$

5). Вычислим максимум $\boldsymbol{D}_j$ в каждом столбце платёжной матрицы:

$$\boldsymbol{D}_j=\max_{1\le k\le m=2}\left\{a_{kj}\right\}.$$

Для 1-го столбца:

$$\boldsymbol{D}_1=\max\left\{\mathbf{18}\right\}=\mathbf{18}.$$

6). Запишем полученный результат $\boldsymbol{D}_j$ в дополнительную строку снизу платёжной матрицы. Получим следующую таблицу:

Платёжная матрица игры 1×1

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{M}_i$	
	$\boldsymbol{B}_1$		
$\boldsymbol{A}_1$	18	**18**	$\Leftarrow$
$\boldsymbol{D}_j$	**18**	—	
	$\Uparrow$		

Тогда *верхняя цена игры* $\boldsymbol{\beta}=\min\left\{\mathbf{18}\right\}=\mathbf{18}$.

7). Установление наличия седловой точки.

Так как $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\mathbf{18}$, то для (**1.1**) выполнимо $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$, а значит есть седловая точка $a_{11}=18$, которой соответствует стратегия $\boldsymbol{A}_1$ для игрока $\boldsymbol{A}$ и стратегия $\boldsymbol{B}_1$ для игрока $\boldsymbol{B}$.

Оптимальному решению соответствует стратегия $\boldsymbol{A}_1$ для игрока $\boldsymbol{A}$ и стратегия $\boldsymbol{B}_1$ для игрока $\boldsymbol{B}$.

Понятно, что данный пример — вырожденный случай. В общем-то, и без приведённого расчёта ясно, что только единственная стратегия и есть оптимальная.

8). И тем самым задача решена■

Вопросы и задания для самопроверки и контроля

Вопросы

1. Как Вы понимаете, что такое *гипотеза* (поясните на примерах)?
2. Как Вы понимаете, что такое *детерминированная гипотеза* (поясните на примерах)?
3. Какие *три причины неопределённости* Вы знаете?
4. В чем состоит *метод решения* МКЗ оптимизации с использованием обобщенного (интегрального) критерия?
5. Какие этапы *подготовки* и *принятия* решений Вы знаете (охарактеризуйте их и поясните на примерах)?
6. Как Вы понимаете, что такое *эффективность* (поясните на примерах)?
7. Как Вы понимаете, что такое *эффективность операции* (поясните на примерах)?
8. Как Вы понимаете, что такое *техническая эффективность* (поясните на примерах)?
9. Как Вы понимаете, что такое *параметр системы* (поясните на примерах)?
10. Как Вы понимаете, что такое *показатель эффективности* (поясните на примерах)?
11. Как Вы понимаете *критерий эффективности* (поясните на примерах)?
12. Как Вы понимаете, что такое *Парето-предпочтительность* (ПП) (поясните на примерах)?
13. Как Вы понимаете, что такое *Парето-несравнимость* (ПН) (поясните на примерах)?
14. Что понимается под *Парето-эффективностью* (ПЭф)?
15. Как Вы понимаете *Парето-оптимальность* (поясните на примерах)?
16. Как Вы понимаете, что такое *конфликтные ситуации*, *личный ход, случайный ход*, *конечная игра* (поясните на примерах)?
17. Как Вы понимаете, что такое *стратегия игрока* (поясните на примерах)?
18. Как Вы понимаете, что такое *оптимальная стратегия игрока* (поясните на примерах)?
19. Как Вы понимаете, что такое *игра с нулевой суммой* (поясните на примерах)?
20. Как Вы понимаете, что такое *платёжная матрица игры* (поясните на примерах)?
21. Как Вы понимаете, что такое *чистая стратегия игрока*, *смешанная стратегия игрока*, *решение игры*, *нижняя цена игры*, *верхняя цена игры*, *цена игры*, *седловая точка* (поясните на примерах)?
22. Как Вы понимаете, что такое ***минимаксная*** *стратегия*, ***максиминная*** *стратегия* (поясните на примерах)?
23. Как находят *решение игры* с *седловой точкой* (поясните на примерах)?
24. Как находят *решение игры* без *седловой точки* (поясните на примерах)?
25. Как следует выполнять упрощение игр (поясните на примерах)?

Задания

a) Придумайте (сформулируйте) *вероятную* гипотезу.
b) Придумайте (сформулируйте) *статистическую* гипотезу.
c) Придумайте (сформулируйте) *детерминированную* гипотезу.
d) Приведите пример *неправильного решения* (поясните Ваш выбор).

e) Используя критерий Вальда, принять решение (выбрать стратегию) в случае следующей платёжной матрицы $|a_{ij}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация Π_j)		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	25	35	20
A_2	80	25	40
A_3	32	85	30
A_4	90	10	50

Ответ: оптимальная стратегия — A_3.

f) Используя критерий Байеса (Лапласа), принять решение (выбрать стратегию) в случае следующей платёжной матрицы $|a_{ij}|$ (матрицы выигрышей ЛПР):

Матрица выигрышей

Варианты решений для ЛПР (стратегия A_i)	Предположения (ситуация Π_j)		
	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	10	2	3
A_2	1	19	4
A_3	5	3	4

Ответ: оптимальная стратегия — A_2.

g) Сторона **A** (см. и ср. [**47**, с. 35-37]) посылает в район расположения противника **B** два бомбардировщика I и II; I летит спереди, II — сзади. Один из бомбардировщиков — заранее неизвестно, какой — должен нести бомбу, другой выполняет функцию сопровождения. В районе противника бомбардировщики подвергаются нападению истребителя стороны **B**. Бомбардировщики вооружены пушками различной скорострельности. Если истребитель атакует задний бомбардировщик II, то по нему ведут огонь пушки только этого бомбардировщика; если же он атакует передний бомбардировщик I, то по нему ведут огонь пушки обоих бомбардировщиков. Вероятность поражения истребителя в первом случае 0.3, во втором 0.7 . Если истребитель не сбит оборонительным огнём бомбардировщиков, то он поражает выбранную им цель с вероятностью 0.6 . Задача бомбардировщиков — донести бомбу до цели; задача истребителя — воспрепятствовать этому, т.е. сбить бомбардировщик-носитель (бомбардировщик с бомбой). Требуется выбрать оптимальные стратегии сторон:

1) для стороны **A** — какой бомбардировщик сделать носителем (стратегия $\boldsymbol{A_1}$ — носитель бомбардировщик I; стратегия $\boldsymbol{A_2}$ — носитель бомбардировщик II);

2) для стороны **B** — какой бомбардировщик атаковать (стратегия $\boldsymbol{B_1}$ — атакуется бомбардировщик I; стратегия $\boldsymbol{B_2}$ — атакуется бомбардировщик II)?

Ответ: седловой точки нет,
есть решение в смешанных стратегиях,

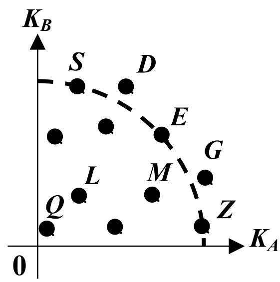
оптимальное решение стороны **A** — $S_A^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$,

т.е. в качестве носителя надо чаще выбирать I, чем II;

оптимальное решение стороны **B** — $S_B^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$,

т.е. чаще надо атаковать бомбардировщик I, чем II;
цена игры $\boldsymbol{\nu}$ = **0.874**.

h) Пусть имеются только 2 показателя эффективности (K_A и K_B) некоторой технической системы. При увеличении показателя (K_A или K_B) эффективность технической системы увеличивается, а при уменьшении соответственно уменьшается. На рисунке ниже точками представлены возможные варианты технической системы. Каждый вариант системы характеризуется парой значений этих двух показателей. Пунктирной линией показана зона предельных значений показателей, которые возможно достигнуть при заданном уровне техники и производства (любая точка, лежащая на пунктирной линии — это технически возможный на практике вариант системы). Что можно сказать о вариантах системы, обозначенных точками ***S***, ***E***, ***Z***, ***L***, ***M***, ***G***, ***D***, ***Q***? Поясните своё решение и приведите свои доводы в пользу него.



Ответ: точки ***S***, ***E***, ***Z*** — Парето-оптимальные;
точки ***S***, ***E***, ***Z*** — Парето-несравнимые;
точки ***S***, ***M*** — Парето-несравнимые;
точки ***Z***, ***M*** — Парето-несравнимые;
точки ***Z***, ***L*** — Парето-несравнимые;
точки ***D***, ***G*** — невозможные варианты системы;
точка ***M*** Парето-предпочтительнее точки ***L***;
точка ***S*** Парето-предпочтительнее точки ***L***;
точка ***E*** Парето-предпочтительнее точек ***M*** и ***L***;
точки ***S***, ***E***, ***L***, ***M***, ***Z*** Парето-предпочтительнее точки ***Q***;
точка ***Q*** лучше точек ***D***, ***G*** (вариант ***Q*** можно создать, а ***D***, ***G*** — нет).

i) Проверить наличие седловой точки и решить игру, т.е.

найти оптимальные стратегии для двух игроков ***A*** и ***B***. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 3 × 4

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***			
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_4$
$\boldsymbol{A}_1$	12	14	17	15
$\boldsymbol{A}_2$	17	16	18	17
$\boldsymbol{A}_3$	15	13	14	11

Ответ: седловая точка есть;
$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{16}$;
цена игры $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{16}$;
оптимальные стратегии $\boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{B}_2$.

j) Проверить (см. и ср. [**49**, с. 165]) наличие седловой точки и решить игру, т.е. найти оптимальные стратегии для двух игроков ***A*** и ***B***. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 3 × 3

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока ***A***	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока ***B***		
	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$
$\boldsymbol{A}_1$	9	7	8
$\boldsymbol{A}_2$	5	6	8
$\boldsymbol{A}_3$	9	7	6

Ответ: седловая точка есть;
$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{7}$;
цена игры $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{7}$;
оптимальные стратегии $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$.

k) Проверить (см. [**49**, с. 165]) наличие седловой точки и решить игру, т.е. найти оптимальные стратегии для двух игроков $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 3×3

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$		
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$
$\boldsymbol{A_1}$	5	6	8
$\boldsymbol{A_2}$	9	7	8
$\boldsymbol{A_3}$	9	7	6

Ответ: седловая точка есть;
$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{7}$;
цена игры $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{7}$;
оптимальные стратегии $\boldsymbol{A_2}$ и $\boldsymbol{B_2}$.

l) Проверить наличие седловой точки и решить игру, т.е. найти оптимальные стратегии для двух игроков $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 3×4

Стратегии $\boldsymbol{A}_i$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$			
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$
$\boldsymbol{A_1}$	12	15	17	14
$\boldsymbol{A_2}$	17	17	18	16
$\boldsymbol{A_3}$	15	11	14	13

Ответ: седловая точка есть;
$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{16}$;
цена игры $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{16}$;
оптимальные стратегии $\boldsymbol{A_2}$ и $\boldsymbol{B_4}$.

m) Проверить (см. [**38**, с. 129-131]) наличие седловой точки. Упростить эту игру, если это возможно. Решить игру, т.е. найти оптимальные стратегии для двух игроков ***A*** и ***B***. Платёжная матрица известна и представлена в следующем виде:

Платёжная матрица игры 4×7

Стратегии $\boldsymbol{A_i}$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$						
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$	$\boldsymbol{B_5}$	$\boldsymbol{B_6}$	$\boldsymbol{B_7}$
$\boldsymbol{A_1}$	2	6	2	4	5	6	3
$\boldsymbol{A_2}$	2	5	1	3	4	5	3
$\boldsymbol{A_3}$	4	5	4	6	8	5	2
$\boldsymbol{A_4}$	3	4	4	5	6	4	1

Ответ: седловой точки нет;
$\boldsymbol{\alpha = 2}$ $\boldsymbol{\beta = 3}$; $\boldsymbol{\alpha \neq \beta}$;
упрощение приводит к следующей матрице:

Платёжная матрица игры 2×2

Стратегии $\boldsymbol{A_i}$ для игрока $\boldsymbol{A}$	Стратегии $\boldsymbol{B}_i$ для игрока $\boldsymbol{B}$	
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_7}$
$\boldsymbol{A_1}$	2	3
$\boldsymbol{A_3}$	4	2

ищем смешанные стратегии;

оптимальное решение стороны **A** — $S_A^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$,

т.е. стратегии $\boldsymbol{A_2}$ и $\boldsymbol{A_4}$ вообще не применять;

оптимальное решение стороны **B** — $S_B^* = \begin{bmatrix} B_1 & B_7 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$,

т.е. стратегии $\boldsymbol{B_2}$, $\boldsymbol{B_3}$, $\boldsymbol{B_4}$, $\boldsymbol{B_5}$, $\boldsymbol{B_6}$, вообще не применять;

цена игры $\boldsymbol{\nu} = \frac{8}{3}$.

Список используемой литературы (источники)

1. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределённости.—М.: Наука, 1981.—258с.

2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология.—М.: Высшая школа, 2001.—208с.

3. Елтаренко Е.А. Оценка и выбор решений по многим критериям: Учебное пособие.—М.: МИФИ, 1995.—112с.

4. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь.—М.: Наука, 1987.—510с.

5. Абчук В.А. Теория риска в морской практике.—Л.: Судостроение, 1983.—152с.

6. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия.—М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999.—910с.

7. Толковый математический словарь (основные термины).—М.: Русский язык, 1988.—243с.

8. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения.—М.: Мир, 1974.—493с.

9. Тема III. Математические модели потребительского поведения и спроса [элект. ресурс].—Реж. доступ.: http://humanities.edu.ru/db/msg/2320.

10. Еланский Д.В. Формальные модели и методы отбора и сертификации проектов промышленного инвестирования в минерально-сырьевом секторе экономики [элект. ресурс].—Реж. доступ.: http://iu5.bmstu.ru/~philippovicha/ITS/IST5/glava_3/3_3.htm.

11. Зубанов Н.В. Анализ устойчивости относительно поставленной цели как один из подходов к описанию функционирования организации в условиях неопределённости [элект. ресурс].—Реж. доступ.: http://www.aup.ru/books/m66/1.htm.

12. Тоценко В. Системы поддержки принятия решений — ваш инструмент для правильного выбора [элект. ресурс].—Реж. доступ.: http://www.computerra.ru/offline/1998/262/1520/.

13. Моренин А.В. Анализ математических методов поддержки принятия решений [элект. ресурс].—Реж. доступ.: http://olap.ru/best/analysis.asp.

14. Многокритериальная оптимизация в задачах оценки подвижности, конкурентоспособности автотракторной техники и диагностики сложных технических систем /В.В. Беляков, М.Е. Бушуева, В.И. Сагунов.—Н.Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 2001. —271с.

15. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. —М: Радио и связь, 1981.—560с.

16. Домарев В.В. Глава 6. Математические модели систем и процессов защиты информации [элект. рес.].—Реж. доступ.: http://domarev.kiev.ua/nauka/glav_6.htm.

17. Горский П. Оценка персонала. Математический инструментарий [элект. ресурс].—Реж. доступ.: http://www.aksionbkg.ru/library/91/112/?i_9432=9477&print=yes.

18. Горский П. Введение в прикладную дисциплину "Поддержка принятия решений" [элект. ресурс].—Реж. доступ.: http://www.devbusiness.ru/development/dms/dms_intro.htm.

19. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. 16.1. Парето-эффективность и общее равновесие /Микроэкономика. Т.2.—СПб: Экономическая школа, 1998. [Элект. ресурс].—Реж. доступ.:
http://microeconomica.economicus.ru/index.php?file=16_1.
20. Копосов В.Н. Математическое моделирование процессов в машиностроении. Лекция 9. Методы решения многокритериальных задач оптимизации [элект. ресурс].—Реж. доступ.: http://www.ispu.ru/library/lessons/Koposov/index.html.
21. Хетагуров Я.А., Древс Ю.Г. Проектирование информационно-вычислительных комплексов.—М.: Высшая школа, 1987.—280с.
22. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах.—М.: Советское радио, 1971.—400с.
23. Петрусь А.В. Эффективность документальных ИПС с позиции теории статистических решений //НТИ.—Сер.2.—1987.—№4.—С.6-14.
24. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Краткий курс математической статистики для технических приложений.–М.: Физматгиз, 1959.—436с.
25. Абчук В.А., Суздаль В.Г. Поиск объектов.—М.: Советское радио, 1977.—336с.
26. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения.—М.: Наука, 1988.—480с.
27. Вентцель Е.С. Исследование операций.—М.: Советское радио, 1972.—552с.
28. Надежность и эффективность в технике: Справочник.—В 10-ти т.—Том 1.—М.: Машиностроение, 1986.—224с.
29. Кулик С.Д. Теория принятия решений (элементы теории проверки вероятных гипотез): учебное пособие.—М.: МИФИ, 2007.—152с.
30. Кулик С.Д., Берков А.В., Яковлев В.П. Введение в теорию квантовых вычислений (методы квантовой механики в кибернетике): учебное пособие.— В 2-х кн.— Кн. 1. —М.: МИФИ, 2008.—212 с.
31. Кулик С.Д., Берков А.В., Яковлев В.П. Введение в теорию квантовых вычислений (методы квантовой механики в кибернетике): учебное пособие.— В 2-х кн. —Кн. 2. — М.: МИФИ, 2008.—532 с.
32. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания.—М.: Мир, 1979.—344с.
33. Кулик С.Д., Ткаченко К.И. Оценка эффективности технических систем с использованием нейронных сетей //Нейрокомпьютеры: разработка и применение.—М.: Радиотехника, 2009.—№9. —С.47-60.
34. Абчук В.А., Емельянов Л.А., Матвейчук Ф.А., Суздаль В.Г. Введение в теорию выработки решений.—М.: Военное издательство Министерства Обороны СССР, 1972.—344с.
35. Пинегина М.В. Математические методы и модели в экономике.—М.: Экзамен, 2004. —128с.
36. Глава 6. Приложение. Теория игр. Некооперативная игра с двумя участниками и нулевой суммой выигрыша [элект. ресурс].—Реж. дост.:
http://www.finec.ru/rus/parts/microeconomics/chap6/GamesTh/gt4_1.html.
37. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.—М.: Высшая школа, 1986.—320с.
38. Тарасов Л.В. Закономерности окружающего мира.—В 3-х кн.—Кн. 2: Вероятность в современном обществе.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.—360с.

39. Успенский В.А. Четыре алгоритмических лица случайности (лекция, 23 июля 2005г., Дубна).— М.: МЦНМО, 2006.—45с.
40. Колмогоров А.Н. Понятие «информация» и основы теории вероятностей //Стенограмма доклада А. Н. Колмогорова «Понятие «информация» и основы теории вероятностей» [элект. ресурс].—Реж. доступ.: http://mmedia.nsu.ru/infohistbd/CGI/BROKER.EXE?EL=3145+MODE=VIEW+PARAM=BOOK_INTERFACE.— (Колмогоров и кибернетика /Редакторы-сост.: Д.А. Поспелов, Я.И. Фет.—Новосибирск: ИВМиМГ (ВЦ) СО РАН, 2001.—159с.)
41. Полетаев И.А. Сигнал.—[М.]: Советское радио,1958.—401с.—(http://vivovoco.rsl.ru/VV/BOOKS/SIGNAL/CONTENT.HTM).
42. Гафт М.Г. Принятие решений при многих критериях. Серия: Математика и кибернетика.—№7.— М.: Знание, 1979.—64с.
43. Сапогин Л.Г., Рябов Ю.А., Бойченко В.А. Унитарная квантовая теория и новые источники энергии.— М.: САЙНС-ПРЕСС, 2008.—280с.
44. Нейман фон Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение.— М.: Наука,1970.—708с.
45. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков.— М.: Наука,1985.—272с.
46. Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег или Букварь по теории стратегических игр.— М.: Советское радио,1960.—266с.
47. Вентцель Е.С. Элементы теории игр (ПЛМ, вып. 32).—М.: Наука,1961.—70с.
48. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений.—СПб: БХВ-Петербург, 2005.—408с.
49. Абчук В.А., Матвейчук Ф.А., Томашевский Л.П. Справочник по исследованию операций.—М.: Воениздат, 1979.–368с.
50. Успенский В.А., Семенов А.Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения.–М.: Наука, 1987.–288с.

Список рекомендуемых источников для самостоятельной работы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология.—М.: Высшая школа, 2007.—208с.

2. Таха Х. Введение в исследование операций (7-е изд.).—М.: Вильямс, 2005.—912с.

3. Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций. —М.: Экзамен, 2003.—448с.

4. Хетагуров Я.А., Древс Ю.Г. Проектирование информационно-вычислительных комплексов.—М.: Высшая школа, 1987.—280с.

5. Волков И.К., Загоруйко Е.А. Исследование операций.—М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.—436с.

6. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения.—М.: Мир, 1974.—493с.

7. Кулик С.Д. Теория принятия решений (элементы теории проверки вероятных гипотез): учебное пособие.—М.: МИФИ, 2007.—152с.

8. Кулик С.Д., Берков А.В., Яковлев В.П. Введение в теорию квантовых вычислений (методы квантовой механики в кибернетике): учебное пособие.— В 2-х кн.— Кн. 1. —М.: МИФИ, 2008.—212 с.

9. Кулик С.Д., Берков А.В., Яковлев В.П. Введение в теорию квантовых вычислений (методы квантовой механики в кибернетике): учебное пособие.— В 2-х кн. —Кн. 2. — М.: МИФИ, 2008.—532 с.

10. Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания.—М.: Мир, 1979.—344с.

11. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация.—М.: Мир, 2006.—824с.

12. Успенский В.А. Четыре алгоритмических лица случайности (лекция, 23 июля 2005г., Дубна).— М.: МЦНМО, 2006.—45с.

13. Тарасов Л.В. Закономерности окружающего мира.—В 3-х кн.—Кн.2: Вероятность в современном обществе.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.—360с.

14. Нейман фон Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение.—М.: Наука,1970.—708с.

15. Васин А., Краснощеков П., Морозов В. Исследование операций.—М.: Академия, 2008.—464с.

16. Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег или Букварь по теории стратегических игр.— М.: Советское радио,1960.—266с.

17. Вентцель Е.С. Элементы теории игр (ПЛМ, вып. 32).—М.: Наука,1961.—70с.

18. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений.—СПб: БХВ-Петербург, 2005.—408с.

19. Пинегина М.В. Математические методы и модели в экономике.—М.: Экзамен, 2004. —128с.

20. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Исследование операций.—М.: Проспект, 2006.—208с.

«Сто раз прочти, сто раз напиши, и смысл сам войдёт в тебя»
(*китайская пословица)* [**13**]

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Глава 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Содержание

I). *Основные понятия, прямые, обратные задачи. Математическое программирование. Геометрическое программирование. Целевая функция. Задача математического программирования, рациональное решение.*

II). *Позином. Задача геометрического программирования. Сложение и умножение позиномов. Регулярный позином. Минимум регулярного позинома. Минимум нерегулярного позинома. Вынужденные ограничения. Двойственная функция. Двойственная задача. Основные теоремы о позиномах. Оценка минимума позинома. Теорема двойственности. Примеры работы с позиномами.*

2.1. Краткие теоретические сведения [14]

Специалистами [**10**, с. 25] принято, что задачи исследования операций бывают *прямые* и *обратные*.

Прямые задачи позволяют для данного решения получить значение показателя эффективности. Для этого разрабатывают или берут готовую математическую модель, позволяющая получить значение показателя эффективности, через заданные условия и *элементы решения*.

Обратные задачи позволяют выбрать решение так, чтобы показатель эффективности обратился в максимум (минимум).

В процессе создания различных технических систем (например, криминалистических, радиолокационных, медицинских и др.) решаются задачи двух видов [**9**, с. 5]: *анализа* и *синтеза*. Задача анализа (**прямая**) — заданы характеристики системы и процесса, действующего на входе, и требуется определить характеристики процесса на выходе системы. Задача синтеза (**обратная**) — заданы характеристики процесса, действующего на входе системы, и требуемая характеристика процесса на выходе системы, и требуется найти такую систему, которая преобразовывала бы процесс с заданной характеристикой в процесс с требуемой характеристикой.

Задача **оптимального синтеза** в статистической формулировке — это есть определение (нахождение) наилучшего (в некотором смысле) образа действий, позволяющего по наблюдаемой (имеющейся) реализации входного воздействия *принять решение* о характеристиках этого воздействия как случайного процесса [**9**, с.5-6].

Кратко рассмотрим постановку задачи оптимизации решения (обратной задачи в общей форме) [**10**, с. 26-29]. Пусть имеется некоторая операция $\boldsymbol{Q}$, на успех которой можно влиять путём выбора решения d (d — группа параметров). Пусть эффективность операции $\boldsymbol{Q}$ характеризуется *одним* показателем $W \to$ max. Пусть имеем дело с **детерминированным** случаем — все условия операции полностью известны заранее, т.е. не содержат *неопределённости*. В этом случае все факторы, от которых зависит успех операции, можно разделить на две группы:

1) заданные, заранее известные факторы $\boldsymbol{U}$ (т.е. условия выполнения операции и ограничения, налагаемые на решение (что и определяет область возможных решений D));

2) зависящие от нас *элементы решения,* образующие в своей совокупности решение d. Показатель W зависит от $\boldsymbol{U}$ и d: $W=W(\boldsymbol{U}, d)$. Будем полагать, что вид зависимости $W(\boldsymbol{U}, d)$ известен (т.е. решена прямая задача). В общем случае $\boldsymbol{U}$ и d — это не числа, а совокупности чисел (т.е. векторы), функции и т.п. В $\boldsymbol{U}$ могут иметься ограничения, налагаемые на решение в виде неравенств или равенств. Тогда обратная задача формулируется следующим образом [**10**, с. 27]:

При заданном комплексе условий $\boldsymbol{U}$ *найти такое решение* $d=d^*$*, которое обращает показатель эффективности* W *в максимум (минимум).*

В случае максимума можно записать: $W^* = \max\limits_{d \in D} \left\{ W\left(\boldsymbol{U}, d\right) \right\}$.

В такой формулировке это (см. [**10**, с.28]) типичная задача нахождения максимума функции или функционала.

Хорошо известно, что классический математический анализ, аналитическая геометрия, линейная алгебра и ряд других дисциплин математики являются фундаментом современной теории оптимизации. Широкое использование дифференциального исчисления в классической теории оптимизации позволяет определять точки экстремумов целевых функций (для критериев эффективности информационных систем). Теория и практика решения реальных оптимизационных задач [**1-9** и др.] предлагает сегодня исследователю широкий спектр методов и средств для поиска экстремумов целевых функций (для критериев эффективности *технической системы* (ТС).

Принято, что раздел математики "*Математическое программирование*" содержит:

- *линейное и нелинейное программирование;*
- *целочисленное и выпуклое программирование;*
- *стохастическое и динамическое программирование;*
- ***геометрическое** программирование;*
- *и т.п.*

Каждый из приведённых выше разделов посвящён методу решения определённого класса оптимизационных задач, который определяется **видом целевой** функции и **видом ограничений**, используемых в условиях задачи.

Кроме этого существуют *генетические алгоритмы* [**22, 23** и др.] как универсальный аппарат для поиска глобального максимума функций многих переменных.

В достаточно общем виде (поиск максимума) задача *математического программирования* может быть записана как $f\left(\vec{x}\right) \to \max;\ \ \vec{x} \in M$, где $f\left(\vec{x}\right)$ — целевая функция; $\vec{x} = \left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right);\ M$ — область допустимых значений для переменных $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

На практике обычно область M задается (определяется) конечной системой условий — неравенств вида $\varphi_i\left(\vec{x}\right) \le 0,\quad i \in \mathbb{N}$, где $\varphi_i\left(\vec{x}\right)$ — заданные функции (*ограничения*). Все или часть *ограничений* может быть задана равенствами или строгими неравенствами. В зависимости от вида целевой функции $f\left(\vec{x}\right)$ и функций

$\varphi_i\left(\vec{x}\right)$, задающих область *M*, применяется соответствующий инструмент (метод) из раздела *математического программирования* для нахождения экстремума. Так, например, если $f\left(\vec{x}\right)$ нелинейная, то используют *нелинейное программирование;* если целевая функция $f\left(\vec{x}\right)$ и функции $\varphi_i\left(\vec{x}\right)$ линейны, то — *линейное программирование;* если дополнительно накладывается условие на переменные, что они должны быть целыми, то используют *целочисленное программирование* и т.д. Более точные условия применения методов *математического программирования* приведены в соответствующих работах [**2, 4, 9, 12** и др.].

Анализ оптимизационных задач, связанных с повышением *эффективности* ТС (ЭТС), показал следующее:

1) в общем случае целевая функция нелинейная;
2) ограничения могут быть представлены как неравенствами, так и равенствами; функции в них могут быть нелинейными;
3) часть функций и их переменных, используемых в задачах, могут быть дискретными и заданы в виде таблицы;
4) некоторые переменные (варьируемые параметры) могут принимать целочисленные положительные значения;
5) пути решения оптимизационных задач не всегда очевидны, и приходится искать *рациональные решения*.

Далее для ТС под *задачей поиска рационального решения* понимается такая задача, которая может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} f_1\left(\vec{x}\right) \geq f_{1\text{здн}}, \\ \quad\vdots \\ f_i\left(\vec{x}\right) \geq f_{i\text{здн}}; \end{cases} \qquad \mathbf{(2.1)}$$

$$\begin{cases} f_{i+1}\left(\vec{x}\right) = f_{i+1\text{здн}}, \\ \quad\vdots \\ f_m\left(\vec{x}\right) = f_{m\text{здн}}; \end{cases} \qquad \mathbf{(2.2)}$$

$$\vec{x} \in M, \qquad \mathbf{(2.3)}$$

где $f_i\left(\vec{x}\right)$ — *i-й показатель эффективности* (ПЭ) ТС; $f_{i\text{здн}}$ — предельное значение для *i*-го ПЭ (*i*=1÷*m*); *M* — область допустимых значений для $\vec{x}$, где $\vec{x}=\left(x_1, x_2, x_3,..., x_n\right)$; переменные $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ являются варьируемыми параметрами, определяющими ЭТС (*n* — число варьируемых параметров).

Таким образом, задача поиска *рационального решения* состоит в том, чтобы решить систему неравенств (**2.1**) при заданных ограничениях (**2.2**) с учётом (**2.3**) для ПЭ ТС.

<u>Определение 2.1</u>

Под *рациональным решением* понимается любое решение $\vec{x}_0 \in M$, удовлетворяющее системе неравенств (**2.1**) при заданных ограничениях (**2.2**) с учётом (**2.3**).

Для того чтобы успешно решить поставленную задачу поиска *рационального решения* разработчику, необходимо знать, как зависят ПЭ $f_i\left(\vec{x}\right)$ от варьируемых параметров $x_1, x_2, x_3,..., x_n$, и поэтому необходимо провести исследования ПЭ от этих параметров.

В зависимости от исходных данных в *техническом задании* (ТЗ) на ТС, от вида ПЭ и наложенных на них ограничений у исследователя для решения оптимизационной задачи, связанной с повышением эффективности, имеются следующие альтернативы:

1) у него есть возможность свести оптимизационную задачу к той, для которой уже разработан метод её решения;

2) у него нет такой возможности и нет ресурса для разработки нового метода оптимизации.

Совершенно очевидно, что первый случай, как правило, проще второго.

Исходные данные для решения *задачи поиска рационального решения* обычно задаются в *техническом задании* на систему. В ТЗ также указывают и $f_{i\text{здн}}$ — заданное предельное значение для *i*-го ПЭ.

Позиномы и их минимизация

Для решения оптимизационных задач введён <u>специальный</u> класс функций — <u>позиномы</u> (см. [**1**, **2**] и др.).

Одночленный позином [**2**, с.7] — функция $\boldsymbol{u}(x_1,\ldots, x_n)$ *положительных* переменных $x_1, x_2, x_3,..., x_n$, определённая следующим равенством (при $\boldsymbol{c}$>0, где $\boldsymbol{a_1},\ldots, \boldsymbol{a_n}$ – *произвольные действительные* числа, т.е. $\forall a_i \in \mathbb{R}$):

$$\boldsymbol{u}(x_1,\ldots, x_n)= c\cdot x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot x_3^{a_3}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n} = c\cdot\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Позином [**2**, с.8] — функция $\boldsymbol{g}(x_1,\ldots, x_n)$, являющаяся суммой *конечного* числа *одночленных позиномов* $\boldsymbol{u_k}(x_1,\ldots, x_n)$ от переменных $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ и определённая следующим соотношением (при $\boldsymbol{c_k}$>0, $\boldsymbol{x_i}$>0 и $\forall a_{ik} \in \mathbb{R}$, где $\boldsymbol{k}$=1,…,$\boldsymbol{m}$; $\boldsymbol{i}$=1,…, $\boldsymbol{n}$):

$$\boldsymbol{g}(x_1,\ldots, x_n)=$$

$$= \sum_{k=1}^{m} u_k\left(x_1, x_2, x_3,..., x_n\right) = \sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot x_1^{a_{1k}}\cdot x_2^{a_{2k}}\cdot x_3^{a_{3k}}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_{nk}}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ik}}\right\}. \qquad \textbf{(2. 5a)}$$

В случае одной ($\boldsymbol{n}$=1) переменной x используют следующую сокращённую запись (при $c_{\boldsymbol{k}}$ >0, x >0 и $\forall a_k \in \mathbb{R}$, где $\boldsymbol{k}$=1,…, $\boldsymbol{m}$):

$$\boldsymbol{g}(x)=\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot x^{a_k}\right\}. \qquad \textbf{(2.5б)}$$

Слагаемые $\boldsymbol{u_k}(x_1,\ldots, x_n)$ есть **ЧЛЕНЫ** позинома, а числа $\boldsymbol{c_k}$ есть коэффициенты позинома [**2**, с.8].

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.8]. Коэффициенты $\boldsymbol{c_k}$ (где $\boldsymbol{k}$=1,…, $\boldsymbol{m}$) у позиномов ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ, а показатели степеней при переменных — *произвольные действительные* числа, т.е. $\forall a_{ik} \in \mathbb{R}$, где $\boldsymbol{k}$=1,…, $\boldsymbol{m}$; $\boldsymbol{i}$=1,…, $\boldsymbol{n}$). Область определения позинома $\boldsymbol{g}(x_1,\ldots, x_n)$ состоит из точек $(x_1,\ldots, x_n)$ с положительными координатами $x_{\boldsymbol{i}}$, т.е. $x_{\boldsymbol{i}}>0$. Тогда (см. (**2. 5а**)) позином $\boldsymbol{g}(x_1,\ldots, x_n)$ — ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ функция $\boldsymbol{n}$ *положительных* переменных $x_1,\ldots, x_n$.

***Пример* 2.А**. Позиномами являются следующие функции (см. и ср. [**2**, с.8]):

$$f_1(x) = x, \text{ где } x>0;$$

$$f_2(x) = N \cdot x^{-1} + \sum_{j=1}^{N} j \cdot x^{1/j}, \text{ где } x>0;$$

$$f_3(x,y) = x^4 y^{-4} + x^{-1} y^{1/2}, \text{ где } x>0 \text{ и } y>0;$$

$$f_4(x,y) = x^{-1/3} + 2x^2 y^{-3} + xy^{1/2}, \text{ где } x>0 \text{ и } y>0;$$

$$f_5(x_1,\ldots, x_n) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}, \text{ где } x_i>0.$$

Решение

Заметим, что

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{m=1} \left\{ c_i \cdot x^{a_i} \right\} = c_1 \cdot x^1 = 1 \cdot x = x,$$

где в (**2.5б**) $\boldsymbol{n}$=1, $\boldsymbol{m}$=1, a_1=1, c_1=1, x_1=x, x>0; т.е. $f_1(x)$ — позином.

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{m} \left\{ c_k \cdot x^{a_k} \right\} = \left\{ c_1 \cdot x^{a_1} \right\} + \sum_{k=2}^{m} \left\{ c_k \cdot x^{a_k} \right\} =$$

$$= \left\{ N \cdot x^{-1} \right\} + \sum_{k=2}^{N+1} \left\{ (k-1) \cdot x^{\frac{1}{k-1}} \right\} = N \cdot x^{-1} + \sum_{j=1}^{N} j \cdot x^{\frac{1}{j}},$$

где в (**2.5б**) $\boldsymbol{m}$=N+1, a_1= –1, c_1=N, $a_k = \left(1/\left[1-k\right]\right)$, $c_k = (k-1)$ $\boldsymbol{k}$=2, 3,…, N+1; x>0; т.е. $f_2(x)$ — позином.

$$f_3(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ik}}\right\}=\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot x_1^{a_{1k}}\cdot x_2^{a_{2k}}\right\}=$$

$$=\left\{c_1\cdot x^{a_{11}}y^{a_{21}}\right\}+\left\{c_2\cdot x^{a_{12}}y^{a_{22}}\right\}=x^4y^{-4}+x^{-1}y^{1/2}\ ,$$

где в (**2.5а**) $\boldsymbol{n}=2$, $\boldsymbol{m}=2$, $a_{11}=4, a_{21}=-4, a_{12}=-1, a_{22}=1/2,$ $c_1=c_2=1$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x>0$ и $y>0$; т.е. $f_3(x,y)$ — позином.

$$f_4(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ik}}\right\}=\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot x_1^{a_{1k}}\cdot x_2^{a_{2k}}\right\}=$$

$$=\left\{c_1\cdot x^{a_{11}}y^{a_{21}}\right\}+\left\{c_2\cdot x^{a_{12}}y^{a_{22}}\right\}+\left\{c_3\cdot x^{a_{13}}y^{a_{23}}\right\}=x^{-1/3}+2x^2y^{-3}+xy^{1/2},$$

где в (**2.5а**) $\boldsymbol{n}=2$, $\boldsymbol{m}=3$, $c_1=c_3=1$, $c_2=2$, а также

$$a_{11}=-(1/3), a_{21}=0, a_{12}=2, a_{22}=-3,\ a_{13}=1, a_{23}=1/2,$$

$x_1=x$, $x_2=y$, $x>0$ и $y>0$; т.е. $f_4(x,y)$ — позином.

$$f_5(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ik}}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{c_k\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ik}}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{c_k\cdot x_1^{a_{1k}}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_{nk}}\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{c_k\cdot x_1^{a_{1k}}\cdot x_2^{a_{2k}}\cdot x_3^{a_{3k}}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_{nk}}\right\}+\left[c_k\cdot x_1^{a_{1k}}\cdot x_2^{a_{2k}}\cdot x_3^{a_{3k}}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_{nk}}\right]=$$

$$=x_1x_2^{-1}+x_2x_3^{-1}+\cdots+x_{n-1}x_n^{-1}+\left[x_nx_1^{-1}\right]=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1},$$

где в (**2.5а**) $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$, $c_k=1$, $k=1,\ldots,\boldsymbol{n}$, $a_{ik}\in\{0;1;-1\}$ а также $x_i>0$; т.е. $f_5(x_1,\ldots,x_n)$ — позином ■

<u>Лемма 2.1</u> [**2**, с.8]. Если $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ — позиномы, то их сумма $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ и произведение $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ (в частности, $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{f}$, где константа $\boldsymbol{\lambda}>0$) — также позином ■

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.8-9]. Класс позиномов достаточно широк. С их помощью на практике описывается большое число различных закономерностей, встречающихся в технике, экономике и в других областях.

На практике позиномы либо явно уже присутствуют в выражениях, отражающих некоторые закономерности, как, например, $v=\pi r^2 h$ — **объём цилиндра**; $I=\mathbf{U}\cdot R^{-\mathbf{1}}$ — **закон Ома** и т.п., либо позиномы появляются в случае, когда для сложной реальной функциональной зависимости желательно найти приближенное, по возможности более простое выражение (т.е. выполнить аппроксимацию данной функции). Позиномы, как полагают специалисты, хорошо служат для приближения функций [**2**, с.9].

<u>Задача геометрического программирования</u> (ЗГП) (см. [**2**, с.9] и др.)

Пусть $\boldsymbol{g_i}(x_1,\ldots,x_n)$ — некоторые позиномы ($\boldsymbol{i}=0, 1,\ldots,\boldsymbol{p}$) от $\boldsymbol{n}$ переменных $x_1,\ldots,x_n$; а $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_p$ — произвольные положительные числа. Тогда следующая задача:

$$\text{найти}\qquad \min\{\,\boldsymbol{g_0}(x_1,\ldots,x_n)\,\}$$

$$\text{при ограничениях}\quad \boldsymbol{x_k}>0\ \ (\boldsymbol{k}=1,\ldots,\boldsymbol{n}) \tag{2.6}$$

$$\text{и}\qquad \boldsymbol{g_i}(x_1,\ldots,x_n)\leq \boldsymbol{b_i}\ \ (\boldsymbol{i}=1,\ldots,\boldsymbol{p}) \tag{2.7}$$

есть ЗГП (или *геометрическая* ***программа***). Ограничения (**2.6**) называют *естественными*, а ограничения (**2.7**) — *вынужденными*. Если нет (**2.7**), то тогда говорят о задаче минимизации позинома *в области его определения*. Существуют пакеты прикладных программ для решения ЗГП, например GeomProg [**24**].

Очевидно, что вопрос о НАИБОЛЬШЕМ значении позинома в области его определения НЕ возникает, так как очевидно, что позином принимает сколь угодно большие значения [**2**, с.9].

Как известно (см. [**2**, с.10]), теория решения задач *геометрического программирования* может быть построена элементарно. Теоретической базой для этого является [**2**, с.10] **фундаментальное неравенство** между *арифметическим* и *геометрическим* средним с *весами*.

Иногда можно использовать обобщение известного следующего классического неравенства [**2**, с.15]:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geq \left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (\mathbf{2.8а})$$

<u>**Оценка минимума позинома**</u> (см. работы [**1**, **2**] и др.)
Опираясь на результаты теории неравенств и применяя неравенства *Коши — Буняковского*, *Гёльдера*, *Минковского*, *Иенсана*, можно получить следующие важные оценки для минимума позинома.

Минимальное значение (см. [**2**, с.31, 65]) произвольного позинома (**2.5а**) не больше, чем сумма его коэффициентов, т.е.

$$\min_{x_i > 0} g\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n \right) \leq \sum_{k=1}^{m} c_k. \qquad (\mathbf{2.8б})$$

В случае <u>регулярного</u> позинома (**2.5а**) неравенство (**2.8б**) становится равенством (см. далее **Теорему 2.4** и определение регулярного позинома).

Пусть (см. [**2**, с.64-65]) для ***i***-й компоненты позинома

$$f_1(x_1) = \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot x_1^{a_{1k}}, \ \ldots, \ f_i(x_i) = \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot x_i^{a_{ik}}, \ \ldots, \ f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot x_n^{a_{nk}},$$

S_i — минимум ***i***-й компоненты , т.е.

$$S_i = \min_{x_i > 0} f_i\left(x_i \right),$$

тогда справедлива следующая оценка:

$$\min_{x_i > 0} g\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n \right) \leq \min_{i = 1 \div n} \left\{ S_1, \ldots, S_i, \ldots, S_n \right\} \leq \sum_{k=1}^{m} c_k. \qquad (\mathbf{2.8в})$$

<u>Теорема 2.1</u> (см. [**2**, с.16])**.** Для любых положительных чисел $x_1,\ldots, x_n$ и положительных чисел $\boldsymbol{a}_1,\ldots, \boldsymbol{a}_n$, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{a}_1+\ldots+\boldsymbol{a}_n=1$, справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k \geq \prod_{i=1}^{n} x_k^{a_k}, \qquad \textbf{(2.9)}$$

в котором знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$ ■

Доказательство ***Теоремы 2.1*** с помощью метода математической индукции дано в работе [**2**, с.16-19]. Числа $\boldsymbol{a}_1,\ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются **нормированными** *весами*. В случае, когда этими *весами* являются числа $\boldsymbol{a}_i=1/\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{i}=1, 2,\ldots, \boldsymbol{n})$, то неравенство (**2.9**) превращается в неравенство (**2.8а**).

Можно показать (см. [**2**, с.19-20]), опираясь на ***Теорему 2.1***, что справедлива следующая ***Теорема 2.2***.

<u>Теорема 2.2</u> (см. [**2**, с.19])**.** Наименьшее значение функции

$$\boldsymbol{\varphi}(z_1,\ldots, z_n)= \sum_{i=1}^{n} \left\{\beta_i \cdot z_i\right\} \qquad \textbf{(2.10)}$$

при ограничениях

$$\beta_i>0,\ \gamma_i>0,\ z_i>0,\ \text{где } i=1, 2,\ldots, n;$$

$$z_1^{\gamma_1} \cdot z_2^{\gamma_2} \cdot z_3^{\gamma_3} \cdot \ldots \cdot z_n^{\gamma_n} = A, \quad \text{где} \quad A=\text{const}>0; \qquad \textbf{(2.11)}$$

равно

$$\boldsymbol{\mu}=\gamma \cdot \left[A \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\gamma_i} \right)^{\gamma_i} \right]^{1/\gamma}, \qquad \textbf{(2.12)}$$

где $\gamma=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$, и достигается в единственной точке $\left(z_1^*, z_2^*, z_3^*,\ldots, z_n^*\right)$ с координатами

$$z_i^* = \frac{\gamma_i}{\beta_i} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\gamma_i} \right)^{\gamma_i} \right]^{1/\gamma} = \frac{\gamma_i}{\beta_i} \cdot \frac{\mu}{\gamma} \ ■ \qquad \textbf{(2.13)}$$

Хорошо известно, что наименьшее значение суммы $z_1+\ldots+z_n$ положительных чисел, когда их произведение равно числу A=const>0, есть $n \cdot A^{1/n}$ и достигается тогда, когда $z_1=z_2=\ldots=z_n$. Если в ***Теореме 2.2*** (см. соотношение (**2.12**)) положить $\beta_i=\gamma_i=1$, где $i=1, 2,\ldots, n$; то получим сразу этот результат [**2**, с.16].

Применение ***Теоремы 2.2*** иногда требует некоторой изобретательности [**2**, с.23].

***Пример* 2.Б** (см. работу [**2**, с.21-22]). Найти <u>наибольшее</u> значение функции

$$f\left(x_1,...,x_n\right)=\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_1+x_2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1+\cdots+x_n}$$

при ограничениях $x_i>0$, где $i=1, 2,\ldots, n$; $x_1+\ldots+x_n=1$.

Решение [**2**, с.23-24]:

Введём новые переменные $z_k=1-x_k\cdot(1+x_1+\ldots+x_k)^{-1}$, где $k=1, 2,\ldots, n$. Понятно, что $x_1=1-(z_1)^{-1}$. Далее последовательно получаем, что

$$x_1=(z_1)^{-1}-1,\ x_2=(z_1)^{-1}\cdot((z_2)^{-1}-1)$$

или

$$x_k=(z_1)^{-1}\cdot(z_2)^{-1}\cdot\ldots\cdot(z_{k-1})^{-1}\cdot((z_k)^{-1}-1)\text{, где } k=2, 3,\ldots, n.$$

Суммируя эти равенства, получим $x_1+\ldots+x_n=(z_1)^{-1}\cdot(z_2)^{-1}\cdot\ldots\cdot(z_n)^{-1}-\mathbf{1}$. Но поскольку $x_1+\ldots+x_n=\mathbf{1}$, то, следовательно, получаем, что

$$z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n=1/2.$$

Таким образом, исходная задача сводится к следующей задаче:

найти $\min\{\mathbf{F}\}$, где $\mathbf{F}=z_1+\ldots+z_n=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{f}(x_1,\ldots,x_n)$,

$\min\{\mathbf{F}\}=\boldsymbol{n}-\max\{\boldsymbol{f}(x_1,\ldots,x_n)\}$ при ограничениях $0<z_k<1$, где $k=1, 2,\ldots, n$; $z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n=1/2$.

В силу ***Теоремы 2.2*** ($A=1/2$, $\beta_i=\gamma_i=1$, $\gamma=n$) этот минимум $\boldsymbol{\mu}=n2^{\left(-1/n\right)}$ достигается в единственной точке $\left(z_1^*,z_2^*,z_3^*,...,z_n^*\right)$, где $z_i^*=2^{\left(-1/n\right)}$. Максимум $\boldsymbol{f}(x_1,\ldots,x_n)$, равный $\boldsymbol{n}-\min\{\mathbf{F}\}=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{n}-n2^{\left(-1/n\right)}$ в исходной задаче, достигается при $x_{\boldsymbol{k}}=2^{\left((k-1)/n\right)}\left\{2^{\left(1/n\right)}-1\right\}$, где $k=1, 2,\ldots, n$ (числа x_k образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=2^{\left(1/n\right)}$) ■

<u>Регулярные позиномы</u> (см. работы [**1**, **2**] и др.)

Специалисты выяснили (см. [**2**, с.25]), что в классе позином от $\boldsymbol{n}$ переменных есть очень важный их подкласс, наименьшее значение которых можно найти очень просто. Такие позиномы получили в среде учёных название *регулярных позиномов* (РП).

Регулярный позином (случай одной переменной x) [**2**, с.25] — позином

$$g(x)=\sum_{i=1}^{m}\left\{c_i\cdot x^{a_i}\right\},$$

у которого

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{c_i\cdot a_i\right\}=0. \qquad \textbf{(2.14a)}$$

Регулярный позином (случай $\boldsymbol{n}$ переменных x_i) [**2**,с.26] — позином

$$g\left(\vec{x}\right)=g(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot x_1^{a_{1k}}\cdot x_2^{a_{2k}}\cdot x_3^{a_{3k}}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_{nk}}\right\},$$

где

$$\begin{cases} c_1\cdot a_{11}+c_2\cdot a_{12}+\cdots+c_m\cdot a_{1m}=0,\\ c_1\cdot a_{21}+c_2\cdot a_{22}+\cdots+c_m\cdot a_{2m}=0,\\ \qquad\qquad\cdots\\ c_1\cdot a_{n1}+c_2\cdot a_{n2}+\cdots+c_m\cdot a_{nm}=0, \end{cases} \qquad \textbf{(2.14б)}$$

т.е. если коэффициенты позинома являются решением однородной системы линейных уравнений.

Отметим следующее [**2**, с.26]. Приведённое выше определение *регулярного позинома* от $\boldsymbol{n}$ переменных x_i равносильно следующему: позином $g(x_1,\ldots,x_n)$ естественным образом порождает $\boldsymbol{n}$ позиномов одной переменной

$$f_{\mathbf{1}}(x_1)=\sum_{i=1}^{m}c_i\cdot x_1^{a_{1i}}\quad,\ \ldots,\ f_{\boldsymbol{n}}(x_{\boldsymbol{n}})=\sum_{i=1}^{m}c_i\cdot x_n^{a_{ni}},$$

которые называют *компонентами* данного позинома.

На практике полезна следующая ***Теорема 2.3***, доказательство которой дано в работе [**2**, с.27-28].

<u>**Теорема 2.3**</u> (см. [**2**, с.27]). Если позиномы $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ — регулярные, то позиномы $\boldsymbol{h}+\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{g}$ (в частности, $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{g}$, где константа $\boldsymbol{\lambda}>0$) есть также регулярные позиномы ■

Отметим следующее [**2**, с.28]. Если позином $g(x_1,\dots, x_n)$ — регулярный позином, то любая его целая положительная степень $\boldsymbol{m}$ (т.е. позином $\{g(x_1,\dots, x_n)\}^{\boldsymbol{m}}$) есть также регулярный позином.

<u>**Минимизация регулярных позиномов**</u> (см. работы [**1**, **2**] и др.)

Минимальное значение *регулярного позинома* в области *его определения* находят с помощью следующей ***Теоремы 2.4***, доказательство которой дано в работе [**2**, с.31-32].

<u>**Теорема 2.4**</u> (см. [**2**, с.31]). Наименьшее значение регулярного позинома равно сумме его коэффициентов и достигается при $x_1=x_2=\dots=x_n=1$, т.е.

$$\min_{x_i>0} g(x_1,\dots, x_n)=g(1, 1,\dots, 1)=\sum_{k=1}^{m} c_k \quad ■ \qquad \textbf{(2.15a)}$$

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.32-33]. ***Теорема 2.4*** НЕ утверждает, что точка (1, 1,…, 1) — единственная точка (глобального) минимума регулярного позинома. Однако можно показать, что регулярный позином одной переменной $g(x)$ имеет ЕДИНСТВЕННЫЙ минимум в точке $x=1$.

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.33]. Можно показать, что если **наименьшее** значение некоторого позинома $g(x_1,\dots, x_n)$ равно сумме его коэффициентов, то это — регулярный позином.

<u>**Минимизация НЕрегулярных позиномов**</u> (см. работы [**1**, **2**] и др.)

Минимальное значение ***НЕ****регулярного позинома* $\boldsymbol{g}(x_1,\dots, x_n)$ в области <u>*его определения*</u> находят с помощью следующей ***Теоремы 2.5***, доказательство которой опирается на ***Теорему 2.4*** и дано в работе [**2**, с.40-44].

<u>Теорема 2.5</u> (см. [**2**, с.40]).

А). Каждое положительное решение

$$(t_1,\dots,t_n),\quad \text{где}\ \ t_i>0,\ \ i=1, 2,\dots,\boldsymbol{n};$$

системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\cdot\left\{c_k\cdot x_1^{a_{1k}}\cdot x_2^{a_{2k}}\cdot x_3^{a_{3k}}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_{nk}}\right\}=0,\qquad i=1, 2,\dots,\boldsymbol{n};\qquad (\mathbf{2.15б})$$

является точкой глобального минимума позинома (**2.5б**) $g(x_1,\dots,x_n)$ (т.е. точкой, в которой он достигает наименьшего значения).

Б). Обратно, каждая точка $(t_1,\dots,t_n)$ глобального минимума этого позинома (**2.5б**) $g(x_1,\dots,x_n)$ удовлетворяет системе этих алгебраических уравнений (**2.15б**) ■

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.40]. Для составления ***i***-го алгебраического уравнения системы (**2.15б**) надо каждый член позинома $g(x_1,\dots,x_n)$ умножить только один раз на показатель степени при переменной x_i именно в этом члене, затем результаты сложить и полученную сумму приравнять нулю. Заметим, что ***i***-е уравнение системы соответствует только переменной x_i, а число слагаемых ***m*** в этом уравнении — числу членов позинома.

Идея минимизации НЕрегулярных позиномов основывается на идеи регуляризации, состоящей в том, чтобы для НЕрегулярного позинома построить некоторый регулярный позином с тем же минимумом (если он вообще достигается) и затем воспользоваться ***Теоремой 2.4***. В итоге задача минимизации произвольного позинома (в области <u>*его определения*</u>) целиком и полностью сводится к нахождению положительного решения (если таковое существует) определённой системы алгебраических уравнений, связанных с данным позиномом (на практике поиск решения этой системы уравнений может быть очень не простым, а иногда легким) [**2**, с.38-39].

<u>Минимизация позиномов в общем случае</u> (см. [**1**, **2**] и др.)

Для рассмотрения общего случая нахождения минимума позинома введены важные понятия: *программа* **А** и *программа* **В**.

Геометрическая программа или *программа* **А** [**2**, с.97]:

найти $\min\{\,g_{\mathbf{0}}(x_1,\ldots,x_n)\}$,

где $$g_{\mathbf{0}}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1}^{m_0}c_k x_1^{a_{1k}}\ldots x_n^{a_{nk}} \qquad (\mathbf{2.16a})$$

при ограничениях $x_j>0$ $(j=1,\ldots,n)$ (**2.16б**)

при наличии *<u>вынужденных ограничений</u>*

$$g_i(x_1,\ldots,x_n)\le \mathbf{1}\quad (i=1,\ldots,p), \qquad (\mathbf{2.16в})$$

где $g_i(x_1,\ldots,x_n)$ — некоторые позиномы $(i=\mathbf{0},1,\ldots,p)$ от n переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Двойственная задача или *программа* **В** [**2**, с.99]:

найти $\max\{v(\delta_1,\ldots,\delta_m)\}$ (**2.17**)

при ограничениях $\delta_k\ge 0$ $(k=1,\ldots,m)$ (**2.18**)

и

$$\begin{cases}\delta_1\cdot a_{11}+\delta_2\cdot a_{12}+\cdots+\delta_m\cdot a_{1m}=0,\\ \delta_1\cdot a_{21}+\delta_2\cdot a_{22}+\cdots+\delta_m\cdot a_{2m}=0,\\ \qquad\qquad\cdots\\ \delta_1\cdot a_{n1}+\delta_2\cdot a_{n2}+\cdots+\delta_m\cdot a_{nm}=0,\\ \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{m_{\mathbf{0}}}=1,\end{cases} \qquad (\mathbf{2.19})$$

где $v(\delta_1,\ldots,\delta_m)$ — определена подробно на с.139, а числа a_{ik} — это показатели степеней при переменных x_i в позиноме (**2. 16а**), а условие нормированности в (**2.19**) определено следующим выражением:

$$\sum_{i=1}^{m_{\mathbf{0}}}\delta_i=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{m_{\mathbf{0}}}=1. \qquad (\mathbf{2.20})$$

Минимальное значение *позинома* (**2.16а**) находят, опираясь на идею двойственности задач геометрического программирования с помощью ***Теоремы двойственности*** (см. точную формулировку и доказательство в [**2**, с.107-108] и в [**1**]). Суть этой теоремы состоит в том, что вместо решения *прямой задачи* (*прямой программы*) можно решать *двойственную задачу* (*двойственную программу*), так как имеется равенство **минимума** *прямой программы* **максимуму** *двойственной программы*, т.е.

$$\min_P g_{\mathbf{0}}(x_1,\ldots,x_n) = \max_D v(\delta_1,\ldots,\delta_m), \qquad \mathbf{(2.21)}$$

где

P — множество всех допустимых точек $(x_1,\ldots,x_n)$ или векторов $\vec{x}$;

D — множество всех допустимых точек $(\delta_1,\ldots,\delta_m)$ или векторов $\vec{\delta}$.

Прямая геометрическая программа (т.е. *программа* **А**) называется совместной, если она обладает допустимым решением, т.е. существует точка (или вектор $\vec{x}=(x_1,\ldots, x_n)$), удовлетворяющая ограничениям (**2.16б**) и (**2.16в**).

Множество всех допустимых векторов $\vec{x}$ двойственной *программы* **А** обозначается символом P. Будем называть [**1**, с.90] *программу* **А** сильно совместной, если найдётся **хотя бы один** вектор $\vec{x}^*$ с положительным компонентами (**2.16б**), для которого все вынужденные ограничения (**2.16в**) выполнены строго (см. [**2**, с.109]), т.е. имеют место быть в (**2.16в**) только строгие неравенства

$$g_i(x_1,\ldots,x_n) < \mathbf{1} \quad (i=1,\ldots,p)).$$

Для *программы* **В** любой вектор $\vec{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_m)$, удовлетворяющий ограничениям (**2.18**) и (**2.19**), называется допустимым двойственным вектором $\vec{\delta}$.

Множество допустимых векторов $\vec{\delta}$ двойственной *программы* **В** обозначается символом D. Принято, что *программа* **В** называется совместной, если множество D не пусто ($D \neq \varnothing$).

В общем случае решение двойственной задачи *геометрического программирования* требует некоторых специальных методов, которые уже разработаны и опираются на алгоритмы *выпуклого программированиия* [**2**, с.110-111].

Двойственная функция $v(\delta_1,\ldots,\delta_m)$ [**2**, с.99]:

$$\boldsymbol{v}(\delta_1,\ldots,\delta_m)=\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i}\cdot\prod_{k=0}^{p}\left(\lambda_k\right)^{\lambda_k}, \qquad (\mathbf{2.22})$$

где $c_1,\ldots,c_m$ — коэффициенты прямой задачи;

$$\lambda_k=\sum_{i\in J_k}\delta_i, \qquad (\mathbf{2.23а})$$

$$m=\sum_{k=0}^{p}m_k; \qquad (\mathbf{2.23б})$$

$$\delta_i\geq 0 \quad (i=1,\ldots,m); \qquad (\mathbf{2.24})$$

причём полагаем

$$\left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i}=1 \qquad (\mathbf{2.25а})$$

при $\delta_i=0$ и

$$\left(\lambda_k\right)^{\lambda_k}=1 \qquad (\mathbf{2.25б})$$

при $\boldsymbol{\lambda_k}=0$, т.е. если равны 0 все переменные $\delta_{\boldsymbol{i}}$ с номерами из множества $\boldsymbol{J_k}$.

Подчеркнем, что числа $c_1, c_2, \ldots, c_m$ в выражении двойственной функции $\boldsymbol{v}(\delta_1,\ldots,\delta_m)$ — это коэффициенты позинома (**2.16а**).

Переменные $\delta_1,\ldots,\delta_m$ называют *двойственными* переменными, причём $\delta_i\geq 0$, где $i=1,\ldots,m$ [**2**, с.99].

ВАЖНО ПОМНИТЬ [**2**, с.99]. Каждое *вынужденное ограничение* (**ВО**) прямой программы вносит в двойственную функцию

$$v(\delta_1,\ldots,\delta_m)$$

соответствующий множитель $\left(\lambda_k\right)^{\lambda_k}$. Если **ВО** нет, то нет и этих сомножителей (при $p=0$, (см. (**2.20**)) $\lambda_0=\sum_{i\in J_0}\delta_i=\sum_{i=1}^{m=m_0}\delta_i\equiv 1$, $\left(\lambda_0\right)^{\lambda_0}=1$):

$$v(\delta_1,\ldots,\delta_m)=\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i}, \qquad (\mathbf{2.26})$$

Любое неравенство $h(x_1,...,x_n) \le b$, где $h(x_1,...,x_n)$ — некоторый позином, а b — некоторое положительное число (т.е. b >0), можно представить как $(1/b) \cdot h(x_1,...,x_n) \le 1$, где

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (1/b) \cdot h(x_1,...,x_n)$$

есть (в силу ***Леммы 2.1***) позином. Опираясь на этот результат, задача геометрического программирования может быть сформулирована как (**2.16а**, **б**, **в**) [**2**, с.97].

Обозначим через Δ множество положительных решений системы (**2.19**).

Исследования позиномов и, в частности, двойственной задачи показали, что справедливы [**2**] теоремы об их свойствах.

Теорема 2.6 (см. [**2**, с.86-87]). Значение позинома (**2.5а**) в любой точке $\vec{x}$, где x_1 >0, …, x_n >0 не меньше, чем значение двойственной функции (**2.26**) ***v***, вычисленное в произвольной точке $(\delta_1,...,\delta_m) \in \Delta$, то есть

$$g\left(\vec{x}\right)=g(x_1,...,x_n)=\sum_{k=1}^{m} c_k x_1^{a_{1k}} ... x_n^{a_{nk}} \ge \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{c_k}{\delta_k}\right)^{\delta_k} = v(\delta_1,...,\delta_m), \quad (\mathbf{2.27})$$

$$x_1 > 0,..., x_n > 0, \quad (\delta_1,...,\delta_m) \in \Delta.$$

В частности,

$$\min_{x_j>0} g(x_1,...,x_n) \ge \max_{\Delta} v(\delta_1,...,\delta_m) \qquad (\mathbf{2.28})$$

в предположении, что указанные min и max достигаются ■

Теорема 2.7а (см. [**2**, с.87-88]). Если позином (**2.5а**) достигает в области положительных значений переменных x_j своего наименьшего значения, то двойственная функция (**2.26**) достигает на множестве Δ своего наибольшего значения. Более того,

$$\min_{x_j>0} g(x_1,...,x_n) = \max_{\Delta} v(\delta_1,...,\delta_m). \qquad (\mathbf{2.29})$$

Кроме того, если $(t_1,...,t_n)$ — точка минимума позинома g $(x_1, \ldots, x_n)$, то точка $(\eta_1,...,\eta_m)$ с компонентами

$$\eta_k = \frac{u_k}{g_0}, \qquad (\mathbf{2.30})$$

где

$$u_k = c_k t_1^{a_{1k}} \ldots t_n^{a_{nk}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \qquad \textbf{(2.31)}$$

$$g_0 = u_1 + \ldots + u_m = \min_{x_j > 0} g(x_1, \ldots, x_n), \qquad \textbf{(2.32а)}$$

является точкой максимума двойственной функции $v(\delta_1, \ldots, \delta_m)$, так что

$$g(t_1, \ldots, t_n) = v(\eta_1, \ldots, \eta_m) \;\blacksquare \qquad \textbf{(2.32б)}$$

<u>Теорема 2.7б</u> (см. [**2**, с.88-89])**.** Пусть $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ — произвольная точка максимума двойственной функции (**2.26**) $v(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ и

$$v_0 = \max_{\Delta} v(\delta_1, \ldots, \delta_m) = v(\eta_1, \ldots, \eta_m).$$

Система уравнений

$$c_k x_1^{a_{1k}} \ldots x_n^{a_{nk}} = \eta_k v_0, \;\; k = 1, 2, \ldots, m; \qquad \textbf{(2.33а)}$$

тогда и только тогда имеет положительное решение, когда позином (**2.5а**) достигает в области x_1 >0, …, x_n >0 своего наименьшего значения.

При этом любое положительное решение системы (**2.33а**) даёт точку (глобального) минимума позинома (**2.16а**) $\blacksquare$

Приведём вариант **теоремы двойственности** для случая отсутствия вынужденных ограничений (ср. с [**1**, с.90-91]).

<u>Теорема 2.7в</u> (см. и ср. [**2**, с.90-91])**.**

А). Если

позином (**2.5а**) достигает в области x_1 >0, …, x_n >0 своего наименьшего значения G_0,

то

двойственная функция (**2.26**) на множестве Δ <u>*положительных*</u> решений ($m_0 = m$) системы (**2.19**) достигает своего наибольшего значения v_0.

При этом $G_0 = v_0$.

Кроме того, если $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, t_1 >0, …, t_n >0 — точка минимума позинома $g(x_1, \ldots, x_n)$, то $(\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \Delta$, где

$$\eta_k = \frac{u_k}{G_0}, \; u_k = c_k t_1^{a_{1k}} \ldots t_n^{a_{nk}}, \; k = 1, 2, \ldots, m;$$

η_k — точка максимума двойственной функции $\boldsymbol{v}$.

Далее, если $(\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \Delta$ — произвольная точка максимума двойственной функции $\boldsymbol{v}$, то любая точка $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_1>0$, …, $t_n>0$ минимума позинома $g(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет системе уравнений

$$c_k x_1^{a_{1k}} \ldots x_n^{a_{nk}} = \eta_k v_0, \; k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (\mathbf{2.33б})$$

Б). Обратно,

если

двойственная функция (**2.26**) $v(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ достигает на множестве Δ своего наибольшего значения в некоторой точке $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ и система (**2.33б**) имеет положительное решение $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_1>0$, …, $t_n>0$,

то

всякое такое решение есть точка (глобального) минимума позинома $g(x_1, \ldots, x_n)$ в области $x_1>0$, …, $x_n>0$ ■

Приведём вариант **теоремы двойственности** для случая наличия вынужденных ограничений (ср. с [**1**, с.90-91]).

<u>**Теорема 2.8**</u> (см. [**2**, с.107-109]). Пусть *программа* **B** обладает положительным допустимым вектором $\vec{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$, где

$$\delta_i>0. \qquad (\mathbf{2.34})$$

Пусть

прямая *программа* **A** — **сильно совместна**. (**2.35**)

Тогда:

а). Существует минимизирующий вектор $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ прямой программы и существует максимизирующий вектор $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ двойственной программы. Более того,

$$\min_P g_0(\vec{x}) = g_0(\vec{t}) = v(\vec{\eta}) = \max_D v(\vec{\delta}); \qquad (\mathbf{2.36})$$

б). Координаты векторов $\vec{t}$ и $\vec{\eta}$ связаны соотношениями

$$c_i t_1^{a_{1i}} \dots t_n^{a_{ni}} = \eta_i v(\vec{\eta}), \quad i \in J_0,$$

$$c_i t_1^{a_{1i}} \dots t_n^{a_{ni}} = \frac{\eta_i}{\lambda_k^*}, \quad i \in J_k, \quad k \in K, \qquad \mathbf{(2.37)}$$

где

$$\lambda_k^* = \sum_{i \in J_k} \eta_i \ , \qquad \mathbf{(2.38)}$$

а K — множество таких номеров $k = 1, 2, \dots, p$; для которых

$$\lambda_k^* > 0 \ \blacksquare$$

Отметим следующее [**2**, с.108-109]. Пусть $\vec{x} \in P$ и $\vec{\delta} \in D$ — допустимые векторы, для которых $g_\mathbf{0}(\vec{x}) = v(\vec{\delta})$, так что $\vec{x}$ и $\vec{\delta}$ — оптимальные векторы своих задач. Тогда:

1). $\forall\ i \in J_0$ выполнимо $\delta_i > 0$;

2). При каждом $k = 1, 2, \dots, p$ координаты δ_i с номерами из множества J_k либо все равны 0, либо все положительны, а равенство $\delta_i = 0$, где $i \in J_k$ эквивалентно

$$\lambda_k = \sum_{i \in J_k} \delta_i = 0;$$

3). Для каждого $k = 1, 2, \dots, p$ имеет место равенство

$$\lambda_k (1 - g_k(\vec{x})) = 0 \ . \qquad \mathbf{(2.39)}$$

Следовательно, если

$$\lambda_k > 0 \, ,$$

то соответствующее ограничение $g_k(\vec{x}) \le 1$ прямой программы (*программы* **A**) является активным, т.е. выполняется в форме равенства $g_k(\vec{x}) = 1$.

Введём следующие важные обозначения.

Пусть m_i — число членов в i-м позиноме $g_i(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть $m = \sum_{k=0}^{p} m_k$ — общее число членов во всех позиномах $g_i(x_1, \dots, x_n)$, где $i = \mathbf{0}, 1, \dots, p$, *программы* **A**.

Обозначим следующие множества чисел:

для $g_0 \Rightarrow \quad J_0 = \{1, 2, 3, ..., m_0\}$;

для $g_1 \Rightarrow \quad J_1 = \{m_0 + 1, m_0 + 2, m_0 + 3, ..., m_0 + m_1\}$;

для $g_2 \Rightarrow \quad J_2 = \{m_0 + m_1 + 1, m_0 + m_1 + 2, ..., m_0 + m_1 + m_2\}$;

$\vdots$

для $g_k \Rightarrow \quad J_k = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} m_i + 1, \sum_{i=0}^{k-1} m_i + 2, ..., \sum_{i=0}^{k-1} m_i + m_k = \sum_{i=0}^{k} m_i \right\}$;

$\vdots$

для $g_p \Rightarrow \quad J_p = \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} m_i + 1, \sum_{i=0}^{p-1} m_i + 2, ..., \sum_{i=0}^{p-1} m_i + m_p = \sum_{i=0}^{p} m_i = m \right\}$.

Заметим, что последовательность множеств $J_0, J_1, J_2, ..., J_k, ..., J_p$ — это ряд чисел $1, 2, 3, ..., m$.

Занумеруем по порядку (последовательно один за одним) все члены

позинома $g_0 \Rightarrow$ числами из множества J_0;

позинома $g_1 \Rightarrow$ числами из множества J_1;

позинома $g_2 \Rightarrow$ числами из множества J_2;

$\vdots$

позинома $g_k \Rightarrow$ числами из множества J_k ;

$\vdots$

позинома $g_p \Rightarrow$ числами из множества J_p.

Теперь каждый позином g_k *программы* **A** можно записать в следующем виде — как сумму из *i*-х членов позиномов:

$$g_k(x_1, ..., x_n) = \sum_{i \in J_k} c_i x_1^{a_{1i}} ... x_n^{a_{ni}},$$

где $k = 1, 2, \ldots, p$.

Пусть матрица A_k — «экспонент» позинома g_k — имеет размер $n \times m_k$ (n — строк и m_k — столбцов):

$$A_{\boldsymbol{k}} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m_k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm_k} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \to x_{\mathbf{1}} \\ \to x_{\mathbf{2}} \\ \\ \to x_{\boldsymbol{n}} \end{matrix} \end{array};$$

2-й член позинома

т.е. каждая j-я строка матрицы A_k соответствует переменной x_j, а каждый i-й столбец матрицы A_k соответствует i-му члену (т.е. $c_i x_1^{a_{1i}} x_2^{a_{2i}} \ldots x_n^{a_{ni}}$) позинома g_k.

Введём матрицу A из n — строк и m — столбцов, где

$$m = \sum_{k=0}^{p} m_k,$$

следующим образом:

$$A = \left[\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m_0} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm_0} \end{matrix}}_{A_0} \quad \boxed{A_1} \quad \ldots \quad \boxed{A_k} \quad \ldots \quad \boxed{A_p} \right].$$

Каждому члену позиномов *программы* **А** соответствует только одна двойственная переменная δ_i (i=1÷m), и наоборот. Отметим следующее [**2**, с.94, 108]. При решении систем уравнений (**2.33б**) и (**2.37**) можно выполнить логарифмирование этих систем. Это позволит упростить (линеаризовать) систему уравнений.

Перейдём к рассмотрению кратких методических указаний к задачам, связанным с позиномами и их минимизацией.

2.2. Методические указания

На практике, при минимизации регулярных позиномов в области их определения, удобно придерживаться следующей последовательности действий, которая может меняться в зависимости от конкретных условий задачи:

0). Вводят, если требуется, необходимые обозначения.

Приводят, если требуется, исходную функцию к представлению в виде позинома (см. условия (**2. 5а**) и (**2.5б**)), т.е. стараются увидеть в исходной функции именно позином.

Формулируют на языке геометрического программирования то, что требуется найти (возможно, придётся переформулировать исходную задачу).

1). При необходимости проверяют, что минимизируемая функция является именно позиномом (см. условия (**2.5а**) и (**2.5б**)), а возможные вынужденные ограничения в постановке исходной задачи отсутствуют (т.е. нет (**2.7**) или (**2.16в**)).

2). При необходимости проверяют (см. условия (**2.14а**) и (**2.14б**)), что минимизируемый позином является именно регулярным позиномом.

3). Находят (см. ***Теорему 2.4***) точку минимума регулярного позинома.

4). Находят минимальное значение регулярного позинома.

5). Анализируя полученные результаты, например точку минимума или минимальное значение позинома, стараются получить конечный ответ на поставленный в задаче вопрос.

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Если (см. ***Теорему 2.1***) $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ — позиномы, то их сумма $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ и произведение $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ (в частности $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{f}$, где константа $\boldsymbol{\lambda}>0$) есть также позином.

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Если (см. ***Теорему 2.3***) позиномы $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ — регулярные, то позиномы $\boldsymbol{h}+\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g}$ (в частности $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{g}$, где константа $\boldsymbol{\lambda}>0$) есть также регулярные позиномы.

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Регулярность позинома позволяет с помощью ***Теоремы 2.4*** достаточно быстро определить его минимум и саму точку минимума.

На практике, при минимизации НЕрегулярных позиномов в области их определения, удобно придерживаться следующей последовательности действий, которая может меняться в зависимости от конкретных условий задачи:

0). Вводят, если требуется, необходимые обозначения.

Приводят, если требуется, исходную функцию к представлению в виде позинома (см. условия (**2. 5а**) и (**2.5б**)), т.е. стараются увидеть в исходной функции именно позином.

Формулируют на языке геометрического программирования то, что требуется найти (возможно, придётся переформулировать исходную задачу).

1). При необходимости проверяют, что минимизируемая функция является именно позиномом (см. условия (**2.5а**) и (**2.5б**)), а возможные вынужденные ограничения в постановке исходной задачи отсутствуют (т.е. нет (**2.7**) или (**2.16в**)).

2). При необходимости проверяют (см. условия (**2.14а**) и (**2.14б**)), что минимизируемый позином НЕ является именно регулярным позиномом.

3). Находят (см. ***Теорему 2.5***) точку минимума НЕрегулярного позинома. Для этого составляют систему алгебраических уравнений (**2.15б**) и затем стараются найти её решение. Если решение найдено, то стала известна точка минимума позинома.

4). Находят минимальное значение НЕрегулярного позинома для найденной точки минимума.

5). Анализируя полученные результаты, например точку минимума или минимальное значение позинома, стараются получить конечный ответ на поставленный в задаче вопрос.

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Для составления $\boldsymbol{i}$-го алгебраического уравнения системы (**2.15б**) надо каждый член позинома умножить только один раз на показатель степени при переменной x_i именно в этом члене, затем результаты сложить и полученную сумму приравнять нулю. При этом $\boldsymbol{i}$-е уравнение этой системы соответствует только переменной x_i, а число слагаемых $\boldsymbol{m}$ в этом уравнении — числу членов позинома. С помощью ***Теоремы 2.5*** и ***Теорем 2.7-2.8*** можно найти минимум НЕрегулярного позинома.

На практике, при минимизации позиномов с помощью двойственной задачи, например при наличии вынужденных ограничений, удобно придерживаться следующей последовательности действий, которая может меняться в зависимости от конкретных условий задачи:

0). Вводят, если требуется, необходимые обозначения.

Приводят, если требуется, исходную функцию к представлению в виде позинома (см. условия (**2. 5а**) и (**2.5б**)), т.е. стараются увидеть в исходной функции именно позином.

Формулируют на языке геометрического программирования то, что требуется найти (возможно, придётся переформулировать исходную задачу).

1). При необходимости проверяют, что минимизируемая функция является именно позиномом (см. условия (**2. 5а**) и (**2.5б**)), а возможные вынужденные ограничения в постановке исходной задачи присутствуют (т.е. есть (**2.7**) или (**2.16в**)).

Необходимо убедиться, что новая формулировка задачи (т.е. *программа* **А**) полностью соответствует (**2.16а**, **б**, **в**).

2). При необходимости составляют двойственную функцию (**2.22**) и формулируют двойственную задачу (**2.17**), (**2.18**), (**2.19**), т.е. *программу* **В**.

3). Находят решение двойственной задачи (т.е. решение системы (**2.19**)) и минимум (см. ***Теоремы 2.7-2.8***) исходной задачи (т.е. *программы* **А**).

4). Находят точку $\vec{t}$ минимума позинома $g_0(\vec{t})$ исходной задачи (т.е. *программы* **А**).

5). При необходимости уточняют и выполняют проверку (для используемых при решении задач теорем) важных предпосылок и положений.

6). Анализируя полученные результаты, например точку минимума или минимальное значение позинома, стараются получить ответ на поставленный в задаче вопрос.

Отметим следующее. Число **Ё**=$\boldsymbol{m}$–$\boldsymbol{n}$–**1** называется *степенью трудности* ($\boldsymbol{n}$ —число независимых переменных). Если **Ё**=0, то решение получить не очень трудно. Если **Ё**≠0, то возникают проблемы и значительные трудности, и в данной работе этот случай не рассматривается. Неравенства (**2.16 б**) и (**2.34**) — строгие, а (**2.24**) —

нестрогие. В ***Теореме 2.8*** важно условие (**2.35**). Не следует забывать про условие (**2.20**), т.е. условие нормированности

$$\sum_{i=1}^{m_0} \delta_i = 1.$$

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Каждому члену позиномов *программы* **А** соответствует <u>только одна</u> двойственная переменная δ_i (i=1÷m), и наоборот. Каждое вынужденное ограничение прямой программы (*программы* **А**) вносит в двойственную функцию

$$v(\delta_1,\ldots,\delta_m)$$

соответствующий множитель $\left(\lambda_k\right)^{\lambda_k}$. Если вынужденных ограничений нет, то нет и этих сомножителей (при p=0 см. (**2.20**)).

ВАЖНО ПОМНИТЬ. Разумно поступать следующим образом:

- если в постановке задачи ЕСТЬ *вынужденные ограничения* (**2.16в**), то следует перейти к решению двойственной задачи;
- если в постановке задачи НЕТ *вынужденных ограничений* (**2.16в**), то следует сначала выполнить проверку позинома на регулярность, так как если он регулярен, то точка его минимума (см. ***Теорему 2.4***) известна сразу, т.е. $x_{\mathbf{min}}$=(1,1,1,…,1) .

Любое неравенство (в исходной формулировке задачи) $h(x_1,\ldots,x_n)\le b$, где $h(x_1,\ldots,x_n)$ — некоторый позином, а b — некоторое положительное число (т.е. b >0), можно представить как $(1/b)\cdot h(x_1,\ldots,x_n)\le 1$, где $g\,(x_1,\ldots,x_n) = (1/b)\cdot h(x_1,\ldots,x_n)$ есть (в силу ***Леммы 2.1***) позином. Опираясь на этот результат, задача геометрического программирования может быть сформулирована как (**2.16а**, **б**, **в**).

Более подробные и важные сведения о неравенствах можно найти в работах [**15**, **16**, **18-21**]. Для не очень подготовленного читателя можно рекомендовать [**17**].

Перейдём к некоторым примерам решённых задач, связанных с позиномами.

2.3. Некоторые примеры решённых задач

Для приобретения навыка работы с позиномами необходимо очень подробно и тщательно самостоятельно решить различные по сложности примеры задач (в крайнем случае, если нет такой возможности, то изучить очень подробные решения разобранных примеров).

В первой группе примеров требуется найти минимум регулярных позиномов в области их определения без вынужденных ограничений. Сначала минимизируются функции с одной переменной, а затем с несколькими переменными. Это самые простые по сложности задачи.

Во второй группе примеров требуется найти минимум позиномов, (которые могут уже быть НЕрегулярными) в области их определения без вынужденных ограничений. Сначала минимизируются функции с одной переменной, а затем — с несколькими переменными. Это чуть труднее по сложности задачи.

В третьей группе примеров требуется найти с помощью двойственной задачи минимум позиномов (которые могут быть НЕрегулярными) уже при возможном наличии вынужденных ограничений. Сначала рассматриваются более простые задачи, а затем — более сложные по сложности задачи.

Представленные далее в примерах решения, как правило, содержат важные две проверки:

1) проверку исходной функции и принятие решение о том, что исходная функция является именно позиномом;

2) проверку позинома на регулярность.

Первая проверка позволяет убедиться в том, что имеем дело именно с позиномами, а не с какими-то другими функциями.

Вторая проверка позволяет (в случае положительного решения о регулярности) достаточно быстро найти минимум регулярного позинома и точку, в которой он достигает минимума.

Перейдём к рассмотрению самих решений задач, связанных с позиномами и их минимизацией.

Пример 2.1 (см. и ср. [**2**, с. 25])

Найти минимум позинома $f(x) = x^{-1} + x$ в области его определения.

Решение

1). Убедимся, что исходная функция $f(x)$ является именно позиномом (при этом отметим, что нет вынужденных ограничений).

Заметим, что ($c_k > 0$, $\forall a_{ik} \in \mathbb{R}$, где $k=1,\ldots, m$; $i=1,\ldots, n$)

$$m=2,\ n=1,\ c_1=1,\ c_2=1,\ a_1=a_{11}=1,\ a_2=a_{12}=-1,$$

тогда ($x_1=x$) выполнено условие (**2.5а**) или (**22.5б**)

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ik}}\right\}=\left\{1\cdot x^{-1}\right\}+\left\{1\cdot x^{+1}\right\}=x^{-1}+x\ ,$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\left\{c_i\cdot x^{a_i}\right\}=\left\{1\cdot x^{-1}\right\}+\left\{1\cdot x^{+1}\right\}=x^{-1}+x\ ,$$

т.е. функция $f(x)$ — это именно позином, так как она представима в виде (**2.5б**).

2). Проверим, что минимизируемый позином $f(x)$ является именно регулярным позиномом.

Заметим, что

$$m=2,\ c_1=1,\ c_2=1,\ a_1=1,\ a_2=-1,$$

но тогда выполнено условие (**2.14а**)

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{c_i\cdot a_i\right\}=0,$$

т.е. позином $f(x)$ — это регулярный позином.

3). Найдём точку минимума регулярного позинома.

Так как позином есть именно регулярный позином, то согласно ***Теореме 2.4*** точка $x_{\mathbf{min}}$ минимума этого позинома в случае n переменных есть (**2.15а**)

$$\vec{x}=\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)=(1,1,1,\ldots,1) \quad \text{или} \quad (\text{при } n=1) \quad x_{\mathbf{min}}=1.$$

4). Найдём минимальное значение регулярного позинома:

$$\min_{x>0} f(x)=f(x_{\mathbf{min}})=f(1)=1^{-1}+1=\mathbf{2}.$$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.2 (см. [**2**, с. 25,33])

Найти минимум позинома $f(x)=x+\dfrac{\sin(\alpha)}{x^{\sin(\alpha)}}+\dfrac{\cos(\alpha)}{x^{\cos(\alpha)}}$, где $0<\alpha<(1/2)\boldsymbol{\pi}$ в области его определения.

Решение

1). Убедимся, что исходная функция $f(x)$ является именно позиномом (при этом отметим, что нет вынужденных ограничений).

Заметим, что ($c_{\boldsymbol{k}}>0$, $\forall a_{ik}\in\mathbb{R}$, где $k=1, 2, 3$; $i=1$) $m=3$, $n=1$ и

$c_1=1$, $c_2=\sin(\alpha)$, $c_3=\cos(\alpha)$,

$a_{11}=1$, $a_{12}=-\sin(\alpha)$, $a_{13}=-\cos(\alpha)$,

тогда (так как $x_1=x$) выполнено условие (**2.5a**)

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ik}}\right\}=\left\{1\cdot x^1\right\}+\left\{\sin(\alpha)\cdot x^{-\sin(\alpha)}\right\}+\left\{\cos(\alpha)\cdot x^{-\cos(\alpha)}\right\}=$$

$$=x+\sin(\alpha)\cdot x^{-\sin(\alpha)}+\cos(\alpha)\cdot x^{-\cos(\alpha)},$$

т.е. $f(x)$ — это именно позином, представленный в виде (**2.5a**).

2). Проверим, что минимизируемый позином $f(x)$ является именно регулярным позиномом.

Заметим, что $m=3$ и

$c_1=1$, $c_2=\sin(\alpha)$, $c_3=\cos(\alpha)$,

$a_1=1$, $a_2=-\sin(\alpha)$, $a_3=-\cos(\alpha)$,

но тогда (так как $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\equiv 1$) выполнено условие (**2.14a**)

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{c_i\cdot a_i\right\}=1-\{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\}=1-1=0,$$

т.е. позином $f(x)$ — это регулярный позином.

3). Найдём точку минимума регулярного позинома.

Так как $f(x)$ есть именно регулярный позином, то согласно ***Теореме 2.4*** точка $x_{\mathbf{min}}$ минимума этого позинома в случае n переменных есть (**2.15a**)

$$\vec{x}=\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)=(1,1,1,\ldots,1)$$

или (при $n=1$) $x_{\mathbf{min}}=1$.

4). Найдём минимальное значение регулярного позинома:

$$\min_{x>0} f(x)=f(x_{\mathbf{min}})=f(1)=\mathbf{1}+\sin(\alpha)+\cos(\alpha).$$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.3 (см. [**2**, с. 38])

Найти минимум позинома $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)^n$, где $n \in \mathbb{N}$, в области его определения.

Решение

1). Убедимся, что исходная функция $f(x,y)$ является именно <u>позиномом</u> (при этом отметим, что нет <u>вынужденных</u> ограничений).
Заметим, что $\left\{xy^{-1} + x^{-1}y\right\}$ — это именно позином (он может быть представлен в виде (**2.5а**)). Но тогда в силу ***Леммы 2.1*** и $\left\{xy^{-1} + x^{-1}y\right\}^n$ — также позином (поскольку $n \in \mathbb{N}$), а значит и $f(x,y)$ — это именно позином в виде (**2.5а**).

2). Проверим, что минимизируемый позином $f(x,y)$ является именно <u>регулярным</u> позиномом.
Заметим, что (см. ***Пример 2.1*** и ниже ***Задание c***)

$\boldsymbol{x} \Rightarrow f_1(x) = x + x^{-1}$ — это регулярный позином;

$\boldsymbol{y} \Rightarrow f_2(y) = y^{-1} + y$ — это регулярный позином;

а тогда выполнено условие (**2.14б**)

$$\begin{cases} c_1 \cdot a_{11} + c_2 \cdot a_{12} = 0, \\ c_1 \cdot a_{21} + c_2 \cdot a_{22} = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0, \\ 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0, \end{cases}$$

т.е. позином $\left\{xy^{-1} + x^{-1}y\right\}$ — это регулярный позином. Тогда в силу ***Теоремы 2.3*** $\left\{xy^{-1} + x^{-1}y\right\}^n$ — это регулярный позином.
т.е. в итоге $f(x,y)$ — это регулярный позином.

3). Найдём точку $(x_{\mathbf{min}}, y_{\mathbf{min}})$ минимума регулярного позинома.
Так как $f(x,y)$ есть именно регулярный позином, то согласно ***Теореме 2.4*** точка минимума этого позинома в случае двух x переменных есть (**2.15а**): $\vec{x} = \left(x, y\right)$=(1,1) или $x_{\mathbf{min}}$=1; $y_{\mathbf{min}}$=1.

4). Найдём минимальное значение регулярного позинома:

$$\min_{x>0,\ y>0} f(x,y) = f(x_{\mathbf{min}}, y_{\mathbf{min}}) = f(1,1) = (1+1)^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}.$$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.4 (см. [**2**, с. 126])

Найти минимум позинома $f(x,y,z) = xy^{-1} + yz^{-1} + x^{-1}z$ в области его определения.

Решение

1). Убедимся, что исходная функция $f(x,y,z)$ является именно позиномом (при этом отметим, что нет вынужденных ограничений).

Заметим, что ($c_k>0$, $\forall a_{ik}\in\mathbb{R}$, где $k=1, 2, 3$; $i=1, 2, 3$) $m=3$, $n=3$ и

$$\begin{array}{llll} & c_1=1, & c_2=1, & c_3=1, \\ \boldsymbol{x} \Rightarrow & a_{11}=1, & a_{12}=0, & a_{13}=-1, \\ \boldsymbol{y} \Rightarrow & a_{21}=-1, & a_{22}=1, & a_{23}=0, \\ \boldsymbol{z} \Rightarrow & a_{31}=0, & a_{32}=-1, & a_{33}=1, \end{array}$$

тогда (так как $x_1=x$; $x_2=y$; $x_3=z$)) выполнено условие (**2.5а**)

$$\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ik}}\right\}=xy^{-1}+yz^{-1}+x^{-1}z = f(x,y,z),$$

т.е. $f(x,y,z)$ — это именно позином в виде (**2.5а**).

2). Проверим, что минимизируемый позином $f(x,y,z)$ является именно регулярным позиномом.

Заметим (см. ***Пример 2.1***), что выполнено условие (**2.14б**)

$\boldsymbol{x} \Rightarrow f_1(x) = x+0+x^{-1}$ — это регулярный позином;

$\boldsymbol{y} \Rightarrow f_2(y) = y^{-1}+y+0$ — это регулярный позином;

$\boldsymbol{z} \Rightarrow f_3(z) = 0+z^{-1}+z$ — это регулярный позином;

$$\begin{cases} c_1\cdot a_{11}+c_2\cdot a_{12}+c_3\cdot a_{13}=0, \\ c_1\cdot a_{21}+c_2\cdot a_{22}+c_3\cdot a_{23}=0, \\ c_1\cdot a_{31}+c_2\cdot a_{32}+c_3\cdot a_{33}=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1\cdot1+0+1\cdot(-1)=0, \\ 1\cdot(-1)+1\cdot1+0=0, \\ 0+1\cdot(-1)+1\cdot1=0, \end{cases}$$

т.е. в итоге $f(x,y,z)$ — это регулярный позином.

3). Найдём точку $(x_{\mathbf{min}}, y_{\mathbf{min}}, z_{\mathbf{min}})$ минимума регулярного позинома.

Так как $f(x,y,z)$ есть именно регулярный позином, то согласно ***Теореме 2.4*** точка его минимума в случае трёх переменных есть (**2.15а**): $\vec{x}=\big(x,y,z\big)=(1,1,1)$ или $x_{\mathbf{min}}=1$; $y_{\mathbf{min}}=1$; $z_{\mathbf{min}}=1$.

4). Найдём минимальное значение регулярного позинома:

$$\min_{x>0,\ y>0,\ z>0} f(x,y,z) = f(x_{\mathbf{min}}, y_{\mathbf{min}}, z_{\mathbf{min}}) = f(1,1,1) = 1+1+1=\mathbf{3}.$$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.5 (см. [**2**, с. 38])

Найти минимум позинома $f(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{x_1, \ldots, x_n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n$ в области M его определения, т.е. $\vec{x} = \left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$; $\vec{x} \in M$.

Решение

1). Убедимся, что исходная функция $f\left(\vec{x}\right)$ является именно позиномом (при этом отметим, что нет вынужденных ограничений).

Заметим,

$$f\left(\vec{x}\right) = \left\{x_1^{n-1} x_2^{-1} \ldots x_n^{-1}\right\} + \ldots + \left\{x_1^{-1} \ldots x_{k-1}^{-1} x_k^{n-1} x_{k+1}^{-1} \ldots x_n^{-1}\right\} + \ldots + \left\{x_1^{-1} \ldots x_{n-1}^{-1} x_n^{n-1}\right\}.$$

Тогда (так как $c_{\boldsymbol{k}}>0$, $m=n$; $c_{\boldsymbol{k}}=1$, $\forall a_{ik} \in \mathbb{R}$, $a_{ik} \in \left\{-1; n-1\right\}$, где $k=1 \div n$; $i=1 \div n$;) выполнено условие (**2.5а**)

$$\sum_{k=1}^{m} \left\{ c_k \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ik}} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left[x_1^{-1} \ldots x_{k-1}^{-1} x_k^{n-1} x_{k+1}^{-1} \ldots x_n^{-1} \right] = f\left(\vec{x}\right),$$

т.е. $f\left(\vec{x}\right)$ — это именно позином в виде (**2.5а**).

2). Проверим, что минимизируемый позином является именно регулярным позиномом.

Заметим, что для (**2.14б**) выполнено $\boldsymbol{k}$-е условие ($\boldsymbol{k}=1 \div n$)

$$\boldsymbol{x_k} \Rightarrow f_{\boldsymbol{k}}(x_{\boldsymbol{k}}) = \underbrace{x_{\boldsymbol{k}}^{-1} + \ldots + x_{\boldsymbol{k}}^{-1} + x_{\boldsymbol{k}}^{n-1} + x_{\boldsymbol{k}}^{-1} + \ldots + x_{\boldsymbol{k}}^{-1}}_{\boldsymbol{n} \text{ штук слагаемых}},$$

т.е. $f_{\boldsymbol{k}}(x_{\boldsymbol{k}})$ — это регулярный позином, так как

$c_1 \cdot a_{\boldsymbol{k}1} + c_2 \cdot a_{\boldsymbol{k}2} + \ldots + c_n \cdot a_{\boldsymbol{k}n} = 0$, или $1 \cdot (-1) \cdot \left(n-1\right) + 1 \cdot \left(n-1\right) = 0$,

т.е. все $\boldsymbol{k}$ позиномов $f_{\boldsymbol{k}}(x_{\boldsymbol{k}})$, где $\boldsymbol{k}=1 \div n$ — регулярные позиномы, а значит в итоге $f\left(\vec{x}\right)$ — это регулярный позином.

3). Найдём точку $\vec{x}_{\mathbf{min}}$ минимума регулярного позинома.

Так как $f\left(\vec{x}\right)$ — регулярный позином, то согласно ***Теореме 2.4*** точка минимума этого позинома в случае n переменных есть (**2.15а**): $\vec{x} = \left(x_1, \ldots, x_n\right) = (1, \ldots, 1)$ или $x_{\mathbf{min}\, i}=1$, где $i=1 \div n$.

4). Найдём минимальное значение регулярного позинома:

$$\min_{\vec{x} \in M} f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}_{\mathbf{min}}\right) = f(1,1,\ldots,1) = \sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + \ldots + 1 = \boldsymbol{n} .$$

5). И тем самым задача решена ■

Пример 2.6 (см. и ср. с [**2**, с. 38])

Найти минимум позинома $f(x) = \dfrac{1}{A}x + Ax^{-1}$, где $A>0$ в области его определения.

Решение

1). Убедимся, что исходная функция $f(x)$ является именно позиномом (при этом отметим, что нет вынужденных ограничений).

Заметим, что ($c_k>0$, $\forall a_{ik} \in \mathbb{R}$, где $k=1, 2$; $i=1$) $m=2$, $n=1$ и

$$c_1 = A^{-1}, \qquad c_2 = A, \qquad a_{11} = 1, \qquad a_{12} = -1,$$

тогда (так как $x_1=x$) выполнено следующее условие (**2.5а**):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \left\{ c_k \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ik}} \right\} = \left\{ A^{-1} \cdot x^1 \right\} + \left\{ A \cdot x^{-1} \right\} = A^{-1}x + Ax^{-1},$$

т.е. $f(x)$ — это именно позином, представленный в виде (**2.5а**).

2). Проверим, что минимизируемый позином $f(x)$ является именно регулярным позиномом.

Заметим, что $m=2$, $c_1 = A^{-1}$, $c_2 = A$ и $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, но тогда в общем случае не выполняется следующее условие (**2.14а**):

$$\sum_{i=1}^{m} \left\{ c_i \cdot a_i \right\} = A^{-1} \cdot 1 + A \cdot (-1) \neq 0,$$

т.е. позином $f(x)$ — это НЕрегулярный позином.

3). Найдём точку минимума НЕрегулярного позинома.

Согласно ***Теореме 2.5*** точка $x_{\mathbf{min}}$ минимума нерегулярного позинома для n переменных есть решение системы из n уравнений (**2.15б**), причём в данном случае ($n=1$) это одно уравнение:

$$\boldsymbol{x} \Rightarrow (+1)\frac{1}{A}x + (-1)Ax^{-1} = 0.$$

Это уравнение имеет единственное положительное решение

$$(+1)\frac{1}{A}x + (-1)Ax^{-1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{A}x^2 = A \Rightarrow x^2 = A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_{\mathbf{min}} = +\sqrt{A^2} = +A = A.$$

4). Найдём минимальное значение НЕрегулярного позинома:

$$\min_{x>0} f(x) = f(x_{\mathbf{min}}) = f(A) = A^{-1} \cdot A + A \cdot A^{-1} = 1+1=\mathbf{2}.$$

5). И тем самым задача решена ■

Пример 2.7 (см. [**2**, с. 38])

Найти минимум позинома $f(x) = \alpha x^{\beta} + \beta x^{-\alpha}$, где $\alpha>0$; $\beta>0$ в области его определения.

Решение

1). Убедимся, что исходная функция $f(x)$ является именно позиномом (при этом отметим, что нет вынужденных ограничений).

Заметим, что ($c_k>0$, $\forall a_{ik} \in \mathbb{R}$, где $k=1, 2$; $i=1$) $m=2$, $n=1$ и

$$c_1 = \alpha, \qquad c_2 = \beta,$$
$$a_{11} = \beta, \qquad a_{12} = -\alpha,$$

тогда (так как $x_1 = x$) выполнено условие (**2.5a**)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \left\{ c_k \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ik}} \right\} = \left\{ \alpha \cdot x^{\beta} \right\} + \left\{ \beta \cdot x^{-\alpha} \right\} = \alpha x^{\beta} + \beta x^{-\alpha},$$

т.е. $f(x)$ — это именно позином, представленный в виде (**2.5a**).

2). Проверим, что минимизируемый позином $f(x)$ является именно регулярным позиномом.

Заметим, что $m=2$, $c_1 = \alpha$, $\quad c_2 = \beta$ и
$a_1 = \beta$, $\quad a_2 = -\alpha$,

но тогда выполнено условие (**2.14a**)

$$\sum_{i=1}^{m} \left\{ c_i \cdot a_i \right\} = c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2 = \alpha \cdot \beta + \beta \cdot (-\alpha) = 0,$$

т.е. позином $f(x)$ — это регулярный позином.

3). Найдём точку минимума регулярного позинома.

Так как позином есть именно регулярный позином, то согласно ***Теореме 2.4*** точка $x_{\mathbf{min}}$ минимума этого позинома в случае n переменных есть (**2.15a**)

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = (1,1,1,\ldots,1) \quad \text{или} \quad (\text{при } n=1) \quad x_{\mathbf{min}} = 1.$$

4). Найдём минимальное значение регулярного позинома:

$$\min_{x>0} f(x) = f(x_{\mathbf{min}}) = f(1) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 == \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}.$$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.8 (см. [**2**, с. 54])

Найти минимум позинома $f(x,y) = xy + 50x^{-1} + 20y^{-1}$ в области его определения.

Решение

1). Убедимся, что исходная функция $f(x,y)$ является именно позиномом (при этом отметим, что нет вынужденных ограничений).

Заметим, что ($c_{\boldsymbol{k}}>0$, $\forall a_{ik} \in \mathbb{R}$, где k=1, 2, 3; i=1, 2) m=3, n=2 и

$$c_1=1, \quad c_2=50, \quad c_3=20,$$

$$\boldsymbol{x} \Rightarrow a_{11}=1, \quad a_{12}=-1, \quad a_{13}=0,$$

$$\boldsymbol{y} \Rightarrow a_{21}=1, \quad a_{22}=0, \quad a_{23}=-1,$$

тогда (так как $x_1=x$; $x_2=y$) выполнено условие (**2.5а**)

$$\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ik}}\right\} = \{1 \cdot xy\} + \{50 \cdot x^{-1}\} + \{20 \cdot y^{-1}\} = f(x,y),$$

т.е. $f(x,y)$ — это именно позином в виде (**2.5а**).

2). Проверим, что минимизируемый позином $f(x,y)$ является именно регулярным позиномом.

Заметим, что не выполняется следующее условие (**2.14б**):

$$\begin{cases} c_1 \cdot a_{11} + c_2 \cdot a_{12} + c_3 \cdot a_{13} = 0, \\ c_1 \cdot a_{21} + c_2 \cdot a_{22} + c_3 \cdot a_{23} = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1 \cdot 1 + 50(-1) + 0 = -49 \neq 0, \\ 1 \cdot 1 + 0 + 20(-1) = -19 \neq 0, \end{cases}$$

т.е. $\boldsymbol{x} \Rightarrow f_1(x) = x + 50x^{-1} + 0$ — это НЕрегулярный позином;

$\boldsymbol{y} \Rightarrow f_2(y) = y + 0 + 20y^{-1}$ — это НЕрегулярный позином;

т.е. позином $f(x,y)$ — это НЕрегулярный позином.

3). Найдём точку минимума НЕрегулярного позинома.

Согласно ***Теореме 2.5*** точка ($x_{\mathbf{min}}, y_{\mathbf{min}}$) минимума нерегулярного позинома для n=2 переменных есть решение следующей системы из двух уравнений (**2.15б**):

$$\boldsymbol{x} \Rightarrow \left(+1\right)xy + \left(-1\right)50x^{-1} + 0 = 0,$$

$$\boldsymbol{y} \Rightarrow \left(+1\right)xy + 0 + \left(-1\right)20y^{-1} = 0,$$

или

$$\begin{cases} xy - 50x^{-1} = 0, \\ xy - 20y^{-1} = 0, \end{cases}$$

которую решим следующим образом.

Вычтем из 1-го уравнения 2-е уравнение и получим следующее выражение:

$$\left(xy - xy\right) - 50\frac{1}{x} - \left(-20\frac{1}{y}\right) = 0,$$

или (так как $x > 0$, $y > 0$)

$$\frac{20}{y} - \frac{50}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{20}{y} = \frac{50}{x} \quad \Rightarrow \quad 2x = 5y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}y.$$

Далее подставим $x = \frac{5}{2}y$ во 2-е уравнение и найдём y, т.е.

$$\frac{5}{2}y^2 - \frac{20}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}y^3 = 20 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{\frac{40}{5}} = \sqrt[3]{8} = 2\,.$$

Таким образом, эта система уравнений имеет единственное положительное (так как для позинома $x > 0$, $y > 0$) решение

$$x_{\mathbf{min}}=5;\ y_{\mathbf{min}}=2.$$

4). Найдём минимальное значение НЕрегулярного позинома:

$$\min_{x>0,\, y>0} f(x_{\mathbf{min}}, y_{\mathbf{min}}) = f(5,2) = 10+10+10=\mathbf{30}.$$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.9 (см. [**2**, с. 11, 47-48])

Найти минимум позинома

$$f(x,y,z) = Aax^{-1}y^{-1}z^{-1} + bxy + 2cxz + 2cyz,$$

где $A>0$; $a>0$; $b>0$; $c>0$ в области его определения.

Решение

1). Убедимся, что исходная функция $f(x,y,z)$ является именно <u>позиномом</u> (при этом отметим, что нет <u>вынужденных</u> ограничений).

Заметим, что ($c_k>0$, $\forall a_{ik}\in\mathbb{R}$, где k=1,2,3,4; i=1,2,3) m=4, n=3 и

$$\begin{array}{lllll} & c_1=Aa, & c_2=b, & c_3=2c, & c_4=2c, \\ \boldsymbol{x} \Rightarrow & a_{11}=-1, & a_{12}=1, & a_{13}=1, & a_{14}=0, \\ \boldsymbol{y} \Rightarrow & a_{21}=-1, & a_{22}=1, & a_{23}=0, & a_{24}=1, \\ \boldsymbol{z} \Rightarrow & a_{31}=-1, & a_{32}=0, & a_{33}=1, & a_{34}=1, \end{array}$$

тогда (так как $x_1=x$; $x_2=y$; $x_3=z$)) выполнено условие (**2.5а**)

$$\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ik}}\right\}=\left\{Aax^{-1}y^{-1}z^{-1}\right\}+\left\{bxy\right\}+\left\{2cxz\right\}+\left\{2cyz\right\}=f(x,y,z),$$

т.е. $f(x,y,z)$ — это именно позином в виде (**2.5а**).

2). Проверим, что минимизируемый позином $f(x,y,z)$ является именно <u>регулярным</u> позиномом.

Заметим, что <u>не выполняется</u> следующее условие (**2.14б**):

$$\begin{cases} c_1\cdot a_{11}+c_2\cdot a_{12}+c_3\cdot a_{13}+c_4\cdot a_{14}=0, \\ c_1\cdot a_{21}+c_2\cdot a_{22}+c_3\cdot a_{23}+c_4\cdot a_{24}=0, \\ c_1\cdot a_{31}+c_2\cdot a_{32}+c_3\cdot a_{33}+c_4\cdot a_{34}=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} Aa\cdot(-1)+b\cdot(+1)+2c\cdot(+1)+0\neq 0, \\ Aa\cdot(-1)+b\cdot(+1)+0+2c\cdot(+1)\neq 0, \\ Aa\cdot(-1)+0+2c\cdot(+1)+2c\cdot(+1)\neq 0, \end{cases}$$

т.е.

$\boldsymbol{x} \Rightarrow f_1(x) = Aax^{-1}+bx+2cx+0$ — это НЕрегулярный позином;

$\boldsymbol{y} \Rightarrow f_2(y) = Aay^{-1}+by+0+2cy$ — это НЕрегулярный позином;

$\boldsymbol{z} \Rightarrow f_3(z) = Aaz^{-1}+0+2cz+2cz$ — это НЕрегулярный позином;

т.е. в итоге $f(x,y,z)$ — это НЕрегулярный позином.

3). Найдём точку минимума НЕрегулярного позинома.

Согласно ***Теореме 2.5*** точка ($x_{\mathbf{min}}, y_{\mathbf{min}}, z_{\mathbf{min}}$) минимума нерегулярного позинома для n=3 переменных есть решение следующей системы из трёх уравнений (**2.15б**):

$$\boldsymbol{x} \Rightarrow (-1)\cdot Aax^{-1}y^{-1}z^{-1} + (+1)\cdot bxy + (+1)\cdot 2cxz + (0)\cdot 2cyz = 0,$$

$$\boldsymbol{y} \Rightarrow (-1)\cdot Aax^{-1}y^{-1}z^{-1} + (+1)\cdot bxy + (0)\cdot 2cxz + (+1)\cdot 2cyz = 0,$$

$$\boldsymbol{z} \Rightarrow (-1)\cdot Aax^{-1}y^{-1}z^{-1} + (0)\cdot bxy + (+1)\cdot 2cxz + (+1)\cdot 2cyz = 0,$$

или

$$\begin{cases} -Aax^{-1}y^{-1}z^{-1} + bxy + 2cxz = 0, \\ -Aax^{-1}y^{-1}z^{-1} + bxy + 2cyz = 0, \\ -Aax^{-1}y^{-1}z^{-1} + 2cxz + 2cyz = 0, \end{cases}$$

которую решим следующим образом. Вычтем из 1-го уравнения 2-е уравнение и сразу находим, что $y=x$. Далее вычтем из 2-го уравнения 3-е уравнение и получим следующее выражение:

$$bxy = 2cxz, \text{ т.е. } z = \frac{b}{2c}y \text{ или } z = \frac{b}{2c}x.$$

Подставив в 1-е уравнение выражения для y и z, получим

$$-Aax^{-1}x^{-1}\left(\frac{b}{2c}x\right)^{-1} + bxx + 2cx\frac{b}{2c}x = 0,$$

или

$$x^{-3}\left(\frac{-2cAa}{b}\right) + 2bx^2 = 0 \Rightarrow x^5 = \left(\frac{cAa}{b^2}\right) \Rightarrow x = \left(\frac{cAa}{b^2}\right)^{1/5}.$$

Таким образом, эта система уравнений имеет положительное (так как для позинома $x>0$, $y>0$, $z>0$) решение

$$x_{\mathbf{min}} = y_{\mathbf{min}} = \left(\frac{cAa}{b^2}\right)^{1/5}; \; z_{\mathbf{min}} = \frac{1}{2}\left(\frac{Aab^3}{c^4}\right)^{1/5}.$$

4). Найдём минимальное значение НЕрегулярного позинома:

$$\min_{x>0,\, y>0,\, z>0} f(x,y,z) = f(x_{\mathbf{min}}, y_{\mathbf{min}}, z_{\mathbf{min}}) = Aax_{\mathbf{min}}^{-2}z_{\mathbf{min}}^{-1} + bx_{\mathbf{min}}^2 + 4cx_{\mathbf{min}}z_{\mathbf{min}}.$$

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.10 (см. [**2**, с. 25])

Скорость распространения в глубокой воде волны, длина которой равна $\boldsymbol{\lambda}$, пропорциональна величине $\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\lambda}}{a}+\frac{a}{\boldsymbol{\lambda}}\right)}$, где $\boldsymbol{a}$ — некоторая константа. При какой длине волны $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{min}}$ скорость будет наименьшая?

Решение

0). Введём обозначения

$$g(\boldsymbol{\lambda})= \boldsymbol{b}\cdot\left\{\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\lambda}}{a}+\frac{a}{\boldsymbol{\lambda}}\right)}\right\} \Rightarrow \quad g(\boldsymbol{\lambda})^2= \boldsymbol{b}^2\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\lambda}}{a}+\frac{a}{\boldsymbol{\lambda}}\right),$$

где $\boldsymbol{b}$ — коэффициент пропорциональности, $\boldsymbol{\lambda}>0$; $a>0$.

Заметим, что так как $\boldsymbol{b}^2$ =Const, то можно полагать, что

$$f(x)= g(\boldsymbol{\lambda})^2\ \boldsymbol{b}^2= \left(\frac{\boldsymbol{\lambda}}{a}+\frac{a}{\boldsymbol{\lambda}}\right),$$

где $x=\boldsymbol{\lambda}$ и $a=A$, т.е. $f(x) = g(x)^2\boldsymbol{b}^2 \ =\frac{1}{A}x+Ax^{-1}$, где $A>0$, и переформулируем исходную задачу следующим образом.

Найти минимум позинома $f(x)\ =\frac{1}{A}x+Ax^{-1}$, где $A>0$ в области его определения (т.е. $x>0$).

1). Убедимся, что исходная функция $f(x)$ является именно <u>позиномом</u> (при этом отметим, что нет <u>вынужденных</u> ограничений).
   Заметим, что $f(x)$ — это именно позином (см. ***Пример 2.6***).

2). Проверим, что минимизируемый позином $f(x)$ является именно <u>регулярным</u> позиномом. Заметим, что $f(x)$ — это НЕрегулярный позином (см. ***Пример 2.6***).

3). Найдём точку минимума НЕрегулярного позинома.
   Точка $x_{\mathbf{min}}$ минимума этого позинома (см. ***Пример 2.6***) уже найдена:

$$x_{\mathbf{min}}=A \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{min}} = a.$$

4). Находить минимальное значение НЕрегулярного позинома (или исходной функции) в задаче не требуется.

5). И тем самым задача решена■

Пример 2.11 (см. [**2**, с. 93])

Найти минимум позинома $f(x,y,z)=4x^{-1}y^{-1}z^{-1}+4xz+xy+2yz$ в области его определения (необходимо использовать решение двойственной задачи).

Решение

1). Убедимся, что исходная функция $f(x,y,z)$ является именно <u>позиномом</u> (при этом отметим, что нет <u>вынужденных</u> ограничений).

Заметим, что ($c_k>0$, $\forall a_{ik}\in\mathbb{R}$, где $k=1,2,3,4$; $i=1,2,3$) $m=4, n=3$ и

$$\begin{array}{lllll} & c_1=4, & c_2=4, & c_3=1, & c_4=2, \\ \boldsymbol{x}\Rightarrow & a_{11}=-1, & a_{12}=1, & a_{13}=1, & a_{14}=0, \\ \boldsymbol{y}\Rightarrow & a_{21}=-1, & a_{22}=0, & a_{23}=1, & a_{24}=1, \\ \boldsymbol{z}\Rightarrow & a_{31}=-1, & a_{32}=1, & a_{33}=0, & a_{34}=1, \end{array}$$

тогда (так как $x_1=x$; $x_2=y$; $x_3=z$) выполнено условие (**2.5a**)

$$\sum_{k=1}^{m}\left\{c_k\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_{ik}}\right\}=4x^{-1}y^{-1}z^{-1}+4xz+xy+2yz=f(x,y,z),$$

т.е. $f(x,y,z)$ — это именно позином в виде (**2.5a**).

Таким образом, условие исходной задачи есть *программа* **A** .

2). Сформулируем далее необходимую двойственную функцию и соответствующую ей систему уравнений.

<u>Двойственная</u> функция (для *программы* **B**) к данной прямой задаче или *программе* **A** формулируется следующим образом [**2**, с. 93]:

$$v(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)=\overbrace{\left(\frac{4}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{4}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{1}{\delta_3}\right)^{\delta_3}\left(\frac{2}{\delta_4}\right)^{\delta_4}}^{\textbf{Ю}}\overbrace{\left(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4\right)^{\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4}}^{\textbf{Я}}$$

или

$$v(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)=\left(\frac{4}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{4}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{1}{\delta_3}\right)^{\delta_3}\left(\frac{2}{\delta_4}\right)^{\delta_4},$$

Заметим, что в данной задаче $c_1=4$, $c_2=4$, $c_3=1$, $c_4=2$, но тогда

$$\text{для } \mathbf{Ю} \Rightarrow \prod_{i=1}^{m=4}\left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} = \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{c_3}{\delta_3}\right)^{\delta_3}\left(\frac{c_4}{\delta_4}\right)^{\delta_4} =$$

$$= \left(\frac{4}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{4}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{1}{\delta_3}\right)^{\delta_3}\left(\frac{2}{\delta_4}\right)^{\delta_4},$$

$$\text{для } \mathbf{Я} \Rightarrow \prod_{k=0}^{p=0}\left(\lambda_k\right)^{\lambda_k} = \left(\lambda_0\right)^{\lambda_0} = 1^1,$$

так как $J_{\mathbf{0}} = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\lambda_{k=0} = \sum_{i \in J_0}\delta_i = \sum_{i \in \{1,2,3,4\}}\delta_i = \sum_{i=1}^{4}\delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 1.$$

Система уравнений будет следующей:

$$\begin{cases} (-1)\cdot\delta_1 + 1\cdot\delta_2 + 1\cdot\delta_3 + 0 = 0, \\ (-1)\cdot\delta_1 + 0 + 1\cdot\delta_3 + 1\cdot\delta_4 = 0, \\ (-1)\cdot\delta_1 + 1\cdot\delta_2 + 0 + 1\cdot\delta_4 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{4}\delta_i = 1. \end{cases} \qquad (*)$$

3). Найдём решение двойственной задачи [**2**, с. 93-94].

Заметим, что система (*) линейных уравнений может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \delta_2 + \delta_3 = \delta_1, \\ \delta_3 + \delta_4 = \delta_1, \\ \delta_2 + \delta_4 = \delta_1, \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 1. \end{cases}$$

Далее, умножив 2-е уравнение на (–1) и сложив первые три уравнения, можно получить, что $2\delta_2 = \delta_1$, или

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1,$$

а значит

$$\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \frac{1}{2}\delta_1.$$

Тогда с учётом 4-го уравнения системы (*) окончательно получаем единственное (положительное) решение $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$, где

$$\eta_1 = \frac{2}{5};$$

$$\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, множество Δ состоит только из точки

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Тогда максимум двойственной функции

$$v_0 = \max_{\Delta} v(\delta_1, ..., \delta_m) = v(\eta_1, ..., \eta_m)$$

определяется следующим выражением:

$$v_0 = v(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \left(\frac{4}{2/5}\right)^{2/5} \left(\frac{4}{1/5}\right)^{1/5} \left(\frac{1}{1/5}\right)^{1/5} \left(\frac{2}{1/5}\right)^{1/5} =$$

$$= \left(\frac{16}{4/25} \cdot \frac{4}{1/5} \cdot \frac{1}{1/5} \cdot \frac{2}{1/5}\right)^{1/5} = \left(100 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 10\right)^{1/5} = \left(10^5\right)^{1/5} = 10.$$

Вывод. Максимум двойственной функции $v(\delta_1, ..., \delta_m)$ известен. Осталось найти точку $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3) = (x_{\min}, y_{\min}, z_{\min})$ минимума исходного позинома $f(x,y,z)$.

4). Найдём точку $\vec{t}$ минимума исходного позинома.
Для определения координат точки минимума составим систему уравнений (**2.33б**), которая для нашей задачи будет иметь вид

$$\begin{cases} 4x^{-1}y^{-1}z^{-1} = \eta_1 v_0 = (2/5)\cdot 10 = 4, \\ 4xz = \eta_2 v_0 = (1/5)\cdot 10 = 2, \\ xy = \eta_3 v_0 = (1/5)\cdot 10 = 2, \\ 2yz = \eta_4 v_0 = (1/5)\cdot 10 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4x^{-1}y^{-1}z^{-1} = 4, \\ 4xz = 2, \\ xy = 2, \\ 2yz = 2. \end{cases} \qquad (**)$$

В (**) подставив в 1-е уравнение значение $xy = 2$ из 3-го уравнения сразу получим, что $z_{\mathbf{min}} = \frac{1}{2}$. Из 2-го уравнения, зная $z_{\mathbf{min}}$, сразу находим, что $x_{\mathbf{min}} = 1$. Из 3-го уравнения, зная $x_{\mathbf{min}}$, сразу определяем, что $y_{\mathbf{min}} = 2$.

В итоге получается, что система (**) имеет единственное и положительное решение

$$\vec{t} = (x_{\mathbf{min}}, y_{\mathbf{min}}, z_{\mathbf{min}}) = \left(1, 2, \frac{1}{2}\right).$$

5). Найдём минимальное значение исходного позинома.

Выполнены условия для ***Теоремы 2.7в***, а значит согласно теореме двойственности

$$\min_{x>0,\ y>0,\ z>0} f(x,y,z) = f(x_{\mathbf{min}}, y_{\mathbf{min}}, z_{\mathbf{min}}) = f(1,\ 2,\ 1/2) = \mathbf{10}.$$

6). И тем самым задача решена■

Пример 2.12 (см. [**2**, с. 100])

Среди всех точек (x, y) плоскости с положительными координатами, удовлетворяющими неравенству $x^4 y^{-4} + x^{-1}\sqrt{y} \le 1$, найти точку, ордината у которой минимальна.

Решение

0). Введём следующие обозначения:

$$g_0(x, y) = y\,,$$

$$g_1(x, y) = x^4 y^{-4} + x^{-1} y^{1/2}\,.$$

Переформулируем исходную задачу в виде следующей прямой задачи — геометрической *программы* **A**:

найти

$$\min g_0(x, y) = \min y \qquad (\mathbf{A}.1)$$

при ограничениях

$$x > 0, \quad y > 0\,, \qquad (\mathbf{A}.2)$$

$$g_1(x, y) = x^4 y^{-4} + x^{-1} y^{1/2} \le 1\,. \qquad (\mathbf{A}.3)$$

1). Убедимся, что новая формулировка задачи полностью соответствует (**2.16а**, **б**, **в**). Это действительно так (g_0 и g_1 — это позиномы, см. ***Пример*** **2.A**.) и

n=2 (в *программе* **A** всего две переменных x и y);

p=1 (всего одно вынужденное ограничение $g_1(x, y) \le 1$);

$m_0 = 1$ (у позинома $g_0(x, y)$ один член, т.е. одно слагаемое);

$m_1 = 2$ (у позинома $g_1(x, y)$ два члена, т.е. два слагаемых);

$m = m_0 + m_1 = 1 + 2 = 3$ (три переменных $\delta_1, \delta_2, \delta_3$);

c_1=1 (так как у $g_0(x, y)$ множитель при y есть 1);

c_2=1 (так как у $g_1(x, y)$ множитель при $x^4 y^{-4}$ есть 1);

c_3=1 (так как у $g_1(x, y)$ множитель при $x^{-1} y^{1/2}$ есть 1);

$$A_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1/2 \end{bmatrix},$$

матрица «экспонент» для задачи

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & x^4 y^{-4} & \phantom{x^{-1}y^{1/2}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x^0 y^1 & \phantom{x^4y^{-4}} & x^{-1} y^{1/2} \end{array} \end{array},$$

для $g_0 \Rightarrow \ J_0 = \{1\}$;

для $g_1 \Rightarrow \ J_1 = \{1+1, 1+2\} = \{2, 3\}$.

2). Поскольку есть вынужденные ограничения, то сформулируем далее необходимую двойственную задачу.

Двойственная задача (или *программа* **В**) к данной прямой задаче или *программе* **А** (**А**.1) ÷ (**А**.3) формулируется следующим образом [**2**, с. 101]:

найти

$$\max v(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \max \overbrace{\left(\frac{1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{1}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{1}{\delta_3}\right)^{\delta_3}}^{\textbf{Ю}} \overbrace{\left(\delta_2 + \delta_3\right)^{\delta_2 + \delta_3}}^{\textbf{Я}} \quad (\textbf{B}.1)$$

при ограничениях

$$\delta_1 \geq 0, \ \delta_2 \geq 0, \ \delta_3 \geq 0, \quad (\textbf{B}.2)$$

$$\begin{cases} 0 \cdot \delta_1 + 4 \cdot \delta_2 + (-1) \cdot \delta_3 = 0, \\ 1 \cdot \delta_1 + (-4) \cdot \delta_2 + \frac{1}{2} \delta_3 = 0, \\ \sum_{i=1}^{m_0 = 1} \delta_i = \delta_1 = 1. \end{cases} \quad (\textbf{B}.3)$$

<u>Заметим, что в данной задаче</u> $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $\delta_1 = 1$, но тогда

$$\text{для } \textbf{Ю} \Rightarrow \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} = \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{c_3}{\delta_3}\right)^{\delta_3} = \left(\frac{1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{1}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{1}{\delta_3}\right)^{\delta_3},$$

$$\text{для } \textbf{Я} \Rightarrow \prod_{k=0}^{p=1} \left(\lambda_k\right)^{\lambda_k} = \left(\lambda_0\right)^{\lambda_0} \left(\lambda_1\right)^{\lambda_1} = 1^1 \cdot \left(\delta_2 + \delta_3\right)^{\delta_2 + \delta_3},$$

так как (см. (**2.20**))

$$\lambda_{k=0} = \sum_{i \in J_0} \delta_i = \sum_{i \in \{1\}} \delta_i = \sum_{i=1}^{1} \delta_i = \delta_1 = 1,$$

$$\lambda_{k=1} = \sum_{i \in J_1} \delta_i = \sum_{i \in \{2,3\}} \delta_i = \sum_{i=2}^{3} \delta_i = \delta_2 + \delta_3.$$

3). Найдём решение двойственной задачи [**2**, с. 100-109].

Заметим, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} 4\delta_2 - \delta_3 = 0, \\ \delta_1 - 4\delta_2 + \dfrac{1}{2}\delta_3 = 0, \\ \delta_1 = 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{C}.1)$$

имеет следующее единственное решение:

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1/2, \quad \delta_3 = 2$$

(сложив все 3 уравнения, получим $1-(1/2)\,\delta_3 = 0 \Rightarrow \delta_3 = 2 \Rightarrow \delta_2 = 1/2$).

Это решение удовлетворяет неравенствам (**B**.2), значит двойственная программа (**B**.1) ÷ (**B**.3) совместна, причём её допустимое множество D состоит из единственного вектора $\vec{\delta}$=(1, 1/2, 2). Отсюда на основании ***Теоремы 2.8*** можно утверждать как о существовании оптимальных векторов у обеих задач, так и о равенстве минимума прямой программы максимуму двойственной (см. (**2.36**)), т.е.

$$\min_P g_0(x,y) = \max_D v(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = v^*.$$

Так как допустимое множество D состоит из единственной точки $\vec{\delta}$= (1, 1/2, 2), то она и будет точкой $\vec{\eta}$=(1, 1/2, 2) максимума двойственной задачи (или *программы* **B**), а значит

$$v^* = v(\vec{\eta}) = \left(\frac{1}{1}\right)^1 \left(\frac{1}{1/2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}+2\right)^{1/2+2} = \frac{25}{16}\sqrt{5},$$

т.е. $\max_D v(\vec{\delta}) = v^*$ и максимум $v(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ известен.

Следовательно, в силу (**2.36**) таков же будет и <u>минимум исходной</u> задачи (т.е. *программы* **A**):

$$\min_P g_0(x,y) = \min_P y = g_0(\vec{t}\,) = \frac{25}{16}\sqrt{5}.$$

Вывод. Минимальное значение позинома $g_0(x,y)$ известно. Осталось найти только точку $\vec{t}$ его минимума.

4). Найдём точку $\vec{t} = (t_1, t_2)$ минимума позинома $g_0(\vec{t})$.

Для определения координат точки минимума составим систему уравнений (**2.37**), которая для нашей задачи будет иметь вид

$$\begin{cases} y = \eta_1 v(\vec{\eta}) = \eta_1 v^* = \dfrac{25}{16}\sqrt{5}, & 1 \in J_0 = \{1\}, \\ x^4 y^{-4} = \dfrac{\eta_2}{\eta_2 + \eta_3} = \dfrac{1/2}{(1/2)+2} = \dfrac{1}{5}, & 2 \in J_1 = \{2,3\}, \quad 1 \in K = \{1\}, \\ x^{-1} y^{1/2} = \dfrac{\eta_3}{\eta_2 + \eta_3} = \dfrac{4}{5} & 3 \in J_1 = \{2,3\}, \quad 1 \in K = \{1\}, \end{cases}$$

где p=1 и $k = 1, 2, \ldots, p$; т.е. k =1, причём $\lambda_k^* > 0$, так как

$$\lambda_k^* = \sum_{i \in J_k} \eta_i = \sum_{i \in J_1} \eta_i = \sum_{i \in \{2,3\}} \eta_i = \sum_{i=2}^{3} \eta_i = \eta_2 + \eta_3 = \frac{1}{2} + 2 > 0, \ K = \{1\}.$$

Решая эту систему, находим

$$x = t_1 = \frac{25}{16}\sqrt[4]{5}, \quad y = t_2 = \frac{25}{16}\sqrt{5}$$

(из 1-го уравнения следует, что $y = \dfrac{25}{16}\sqrt{5}$, а из 2-го, что $x = \dfrac{5}{4}\sqrt{y}$).

Отметим, что 2-е уравнение при $x = \dfrac{25}{16}\sqrt[4]{5}$, $y = \dfrac{25}{16}\sqrt{5}$ разрешимо.

Таким образом, известны координаты *x, y* точки минимума *программы* **А**, т.е. задачи (**А**.1) ÷ (**А**.3).

5). Уточнение и проверка (для используемых при решении задач теорем) важных предпосылок и положений.

Заметим, что при

$$x = 4, \quad y = 5 \text{ или } \vec{x}^* = (4, 5)$$

неравенство (**А**.3), т.е. (**2.16в**) выполняется строго (т.е. найден **хотя бы один** вектор $\vec{x}^*$ с положительным компонентами (**2.16б**), для которого все вынужденные ограничения (**2.16в**) выполнены строго), а значит *программа* **А** сильно совместна.

Заметим, что *программа* **B** обладает положительным допустимым вектором $\vec{\delta}=(\delta_1,...,\delta_m)$=(1, 1/2, 2), где δ_i>0, так как он является решением системы (**C**.1).
Таким образом, выполнены условия ***Теоремы 2.8***.
Из (**2.23а**) и (**2.38**) следует, что

$$\lambda_{k=1}=\sum_{i\in J_1}\eta_i=\sum_{i\in\{2,3\}}\eta_i=\sum_{i=2}^{3}\eta_i=\eta_2+\eta_3=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}>0.$$

Согласно условию (**2.39**) для оптимальных векторов

$$\vec{t}=(t_1,t_2) \quad \text{и} \quad \vec{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$$

выполнимо следующее равенство:

$$\lambda_1(1-g_1(t_1,t_2))=0,$$

т.е.

$$(\eta_2+\eta_3)\cdot\left(1-\left[t_1^{\,4}t_2^{\,-4}+t_1^{\,-1}t_2^{\,1/2}\right]\right)=0\,.$$

Далее, поскольку (k=1)

$$\lambda_k>0\;,\ \text{т.е. } \lambda_k\neq 0,$$

или

$$\left[\eta_2+\eta_3\right]=5/2>0\,,$$

то получаем

$$t_1^{\,4}t_2^{\,-4}+t_1^{\,-1}t_2^{\,1/2}\;=1.$$

Таким образом, точка минимума

$$(t_1,\ t_2)$$

удовлетворяет ограничению (**A**.3) в форме равенства. Другими словами, точка минимума задачи (**A**.1) ÷ (**A**.3) лежит на кривой, определяемой уравнением

$$x^4y^{-4}+x^{-1}y^{1/2}=1\,,$$

$$x>0,\ y>0.$$

6). И тем самым задача решена■

Вопросы и задания для самопроверки и контроля

<u>Вопросы</u>

1. Как Вы понимаете, что такое *рациональное решение* (поясните на примерах)?
2. Приведите общую постановку задачи *математического программирования* (приведите пример сведения практической задачи к ней).
3. Как Вы понимаете, что такое *одночленный позином*, *позином*, *коэффициенты позинома* (приведите примеры позиномов)?
4. Можно ли найти max (min) значение позинома (приведите пример практической задаче, сводящей к минимизации позинома)?
5. Как Вы понимаете, что такое *геометрическая программа* (приведите общую постановку задачи *геометрического программирования*)?
6. Приведите общую постановку задачи *геометрического программирования* (приведите пример сведения практической задачи к ней)?
7. Как Вы понимаете, что такое *регулярный позином* от одной переменной (приведите примеры таких позиномов)?
8. Как Вы понимаете, что такое *регулярный позином* от нескольких переменных (приведите примеры таких позиномов)?
9. В чем состоит суть *Теоремы 2.1* для задач принятия решений (поясните на примерах)?
10. В чем состоит суть *Теоремы 2.2* для задач принятия решений (поясните на примерах)?
11. В чем состоит суть *Теоремы 2.3* для задач принятия решений (поясните на примерах)?
12. В чем состоит суть *Теорем 2.4, 2.5* для задач принятия решений (поясните на примерах)?
13. В чем состоит суть *Теоремы 2.6* для задач принятия решений (поясните на примерах)?
14. В чем состоит суть *Теоремы 2.7* для задач принятия решений (поясните на примерах)?
15. В чем состоит суть *Теоремы 2.8* для задач принятия решений (поясните на примерах)?
16. В чем состоит разница задач *минимизации регулярных позиномов* и НЕ*регулярных позиномов* (поясните на примерах)?
17. Как решают задачу *минимизации позиномов в общем случае* (поясните на примере)?
18. Как Вы понимаете, что такое *двойственная программа* и *двойственная функция* (поясните на примере)?
19. В чем состоит суть ***Теоремы двойственности*** для задач принятия решений (поясните на примерах)?
20. Как можно (приближённо) оценить минимальное значение произвольного позинома (поясните на примерах)?

Задания

a) Найти минимум позинома $f(x)=\dfrac{1}{x}+Rx^{\frac{1}{R}}$, где $R\neq 0$ в области его определения (см. [**2**, с. 125]).

Ответ: $x_{\mathbf{min}}=1;\ \min\limits_{x>0} f(x)=f(x_{\mathbf{min}})=f(1)=\mathbf{1}+R.$

b) Найти минимум позинома $f(x)=\ x^{-1}+x^{\sin^2(\alpha)}+x^{\cos^2(\alpha)}$ в области его определения (см. [**2**, с. 125]).

Ответ: $x_{\mathbf{min}}=1;\ \min\limits_{x>0} f(x)=f(x_{\mathbf{min}})=f(1)=1+1+1=\mathbf{3}.$

c) Найти минимум позинома $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^k$ в области его определения (см. [**2**, с. 38]).

Ответ: $x_{\mathbf{min}}=1;\ \min\limits_{x>0} f(x)=f(x_{\mathbf{min}})=f(1)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^k=\boldsymbol{n}.$

d) Найти минимум позинома $f(x)=2x^{\frac{-1}{S}}+2x^{\frac{2}{S}}+x^{\frac{-2}{S}}$, где $S\neq 0$ в области его определения (см. и ср. [**2**, с. 26, 127]).

Ответ: $x_{\mathbf{min}}=1;\ \min\limits_{x>0} f(x)=f(x_{\mathbf{min}})=f(1)=\mathbf{5}.$

e) Найти минимум позинома $f(x)=2x^{\frac{-4}{R}}+2x^{\frac{5}{R}}+x^{\frac{-2}{R}}$, где $R\neq 0$ в области его определения (см. и ср. [**2**, с. 26, 127]).

Ответ: $x_{\mathbf{min}}=1;\ \min\limits_{x>0} f(x)=f(x_{\mathbf{min}})=f(1)=\mathbf{5}.$

f) Найти минимум позинома

$$f(x,y)=2x^{\frac{-4}{R}}y^{\frac{-1}{S}}+2x^{\frac{5}{R}}y^{\frac{2}{S}}+x^{\frac{-2}{R}}y^{\frac{-2}{S}},$$

где $R\neq0$; $S\neq0$ в области его определения (см. [**2**, с. 26, 127]).

Ответ: $x_{\mathbf{min}}=1$; $y_{\mathbf{min}}=1$;

$$\min_{x>0,\ y>0} f(x,y)=f(x_{\mathbf{min}},y_{\mathbf{min}})=f(1,1)=\mathbf{5}.$$

g) Найти минимум позинома $f(x)=Ax^{\alpha}+Bx^{-\beta}$, где $A>0$; $B>0$; $\alpha>0$; $\beta>0$ в области его определения (см. [**2**, с. 47]).

Ответ: $x_{\mathbf{min}}=\left[B\beta\alpha^{-1}A^{-1}\right]^{1/(\alpha+\beta)}$;

$$\min_{x>0} f(x)=f(x_{\mathbf{min}})=\left(\alpha+\beta\right)\left[A\beta^{-1}\right]^{\beta/(\alpha+\beta)}\left[B\alpha^{-1}\right]^{\alpha/(\alpha+\beta)}.$$

h) Компания (см. и ср. [**2**, с. 94-96]) заключила контракт на перевозку некоторого количества Q. Для морских перевозок компания решает на время $\boldsymbol{\tau}$ арендовать судно (рудовоз).

Пусть L — длина рейса в обе стороны (обратно судно идет порожняком), V — скорость судна (полагаем постоянной во время плавания), а $\boldsymbol{\tau}=Q\cdot T^{\mathbf{-1}}\cdot L\cdot V^{\mathbf{-1}}$.

Затраты на морские перевозки складываются из следующих компонент: расходов S_1 на аренду судна, оплату $S_2=\boldsymbol{k_2}\cdot\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{k_2}$ — коэффициент пропорциональности) труда экипажа и закупку S_3 топлива.

Пусть

$$c_1=\boldsymbol{k_1}\cdot Q\cdot L=\text{const};\ c_2=\boldsymbol{k_2}\cdot Q\cdot L=\text{const};\ c_3=\boldsymbol{k_3}\cdot Q\cdot L=\text{const}.$$

Стоимость месячной аренды судна определяется по эмпирической формуле

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{k_1}\cdot T^{\mathbf{1.2}},$$

где T — тоннаж судна, а $\boldsymbol{k_1}$ — коэффициент пропорциональности.

Затраты S_3=$\boldsymbol{k_3}\cdot\boldsymbol{h}\cdot R$ ($\boldsymbol{k_3}$ — коэффициент пропорциональности) на топливо пропорциональны как общему пути, пройденному судном, т.е. $\boldsymbol{h}=Q\cdot T^{\,-\mathbf{1}}\cdot L$, так и гидродинамическому сопротивлению судна, которое в свою очередь можно полагать пропорциональным величине $R=T^{\,\mathbf{2/3}}\cdot V^{\,\mathbf{2}}$. Тогда $S_3=c_3\cdot T^{-\mathbf{1/3}}\cdot V^{\mathbf{2}}$.

Необходимо принять решение (о скорости судна V и его тоннаже T), которое обеспечивает минимум затрат $g(T,V)$ на перевозку груза.

С каким тоннажем следует выбрать судно и какое распоряжение следует отдать капитану этого судна относительно скорости движения?

Ответ: $T_{\mathbf{min}}=\left(\dfrac{c_2}{c_1}35\right)^{\frac{5}{6}},\ V_{\mathbf{min}}=\left(\dfrac{18}{c_3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{c_1}{35}\right)^{\frac{5}{27}}c_2^{\frac{4}{27}},$

$$g(T_{\mathbf{min}},V_{\mathbf{min}})=54\left(\frac{c_1^{35}c_2c_3^{18}}{35^{35}\cdot 18^{18}}\right)^{1/54}.$$

i) Найти минимум позинома $g_0(x,y)=y+x^4y^{-4}$ при наличии вынужденных ограничений $g_1(x,y)=x^{-1}y^{1/2}\le 1$ (см. [**2**, с. 111]).

Ответ: $\min g_0(x,y)=g_0\left(\sqrt[6]{2},\sqrt[3]{2}\right)=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

j) Оценить минимум позинома $f(x,y)=15\dfrac{1}{x}+x^2\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}y$ в области его определения. Сравните полученный результат с точным значением минимума позинома (см. [**2**, с. 65]).

Ответ: $\min\limits_{x>0,\ y>0} f(x,y)=f\left(15^{\frac{2}{3}},15\right)=3\sqrt[3]{5}\approx 7.4\le$

$\le\min\{12,\ 17\}=\mathbf{12}$.

Список используемой литературы (источники)

1. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование.—М.: Мир, 1972.—312с.

2. Бекишев Г.А., Кратко М.И. Элементарное введение в геометрическое программирование.—М.: Наука, 1980.—144с.

3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.—М.: Мир, 1974.—520с.

4. Кофман А., Анри-Лабордер А. Целочисленное программирование. Сер.:Методы и модели исслед. опер.—М.: Мир, 1977.—Т.3.—432с.

5. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.—М.: Мир, 1985.—512с.

6. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения.—М.: Наука, 1989.—160с.

7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач.—М.: Наука, 1980.—519с.

8. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума.—М.: Наука, 1967.—268с.

9. Таха Х. Введение в исследование операций: в 2-х книгах.—М.: Мир, 1985.—(Кн.1.—479с.; Кн.2.—496с.).

10. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология.—М.: Высшая школа, 2001.—208с.

11. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь.—М.: Наука, 1987.—510с.

12. Зенер К. Геометрическое программирование и техническое проектирование.—М.: Мир, 1973.—111с.

13. Japanese Platinum. Образовательная коллекция [электронный ресурс] /1С, ММТ, ДО.—Электр. дан., прог. 2003.—1 CD-ROM диск.–Загл. с этикетки диска.—(Мультимедийные курсы иностранных языков).

14. Кулик С.Д. Теория принятия решений (элементы теории проверки вероятных гипотез): учебное пособие.—М.: МИФИ, 2007.—152с.

15. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства.—М.: Мир,1965.—165с.

16. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.—М.: Мир,1965.—277с.

17. Коровкин П.П. Неравенства (ПЛМ, вып. 5).—М.: Наука,1966.—56с.

18. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах.—М.: Наука, 1967.—303с.

19. Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.—256с.

20. Маршалл А. Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и её приложения.—М.: Мир,1983.—576с.

21. Черников С.Н. Линейные неравенства.—М.: Наука, 1968.—488с.

22. Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Теория и практика эволюционного моделирования.—М.: Физматлит, 2003.—432с.

23. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы.—М.: Горячая линия-Телеком, 2006.—452с.

24. Бухвалова В.В.,Рогульская А.С. Введение в геометрическое программирование [элект. ресурс].— Реж. доступ.: http://www.intuit.ru/department/se/intgeompr/.

Список рекомендуемых источников для самостоятельной работы

1. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование.—М.: Мир, 1972.—312с.

2. Бекишев Г.А., Кратко М.И. Элементарное введение в геометрическое программирование.—М.: Наука, 1980.—144с.

3. Зенер К. Геометрическое программирование и техническое проектирование.—М.: Мир, 1973.—111с.

4. Таха Х. Введение в исследование операций.—Изд. 7-е.—М.: Вильямс, 2005.—912с.

5. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства.—М.: Мир,1965.—165с.

6. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.—М.: Мир,1965.—277с.

7. Коровкин П.П. Неравенства (ПЛМ, вып. 5).—М.: Наука,1966.—56с.

8. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах.—М.: Наука, 1967.—303с.

9. Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.—256с.

10. Маршалл А. Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и её приложения.—М.: Мир,1983.—576с.

11. Черников С.Н. Линейные неравенства.—М.: Наука, 1968.—488с.

12. Бухвалова В.В., Рогульская А.С. Введение в геометрическое программирование [элект. ресурс].— Реж. доступ.: http://www.intuit.ru/department/se/intgeompr/.

13. Судаков Р.С., Яцко А.И. Элементы прикладной теории геометрического программирования. — М.: Знание, 2004. — 126.

14. Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Теория и практика эволюционного моделирования.—М.: Физматлит, 2003.—432с.

15. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы.—М.: Горячая линия-Телеком, 2006.—452с.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АдК — *аддитивный критерий*;
АС — *активная стратегия*;
АСОИУ — *автоматизированная система обработки информации и управления*;
АФИПС — *автоматизированная фактографическая информационно-поисковая система*;

БкИ — *бесконечная игра*;

ВГ — *вероятная гипотеза*;
ВО — *вынужденное ограничение*;

Г — *гипотеза*;
ГОСТ — *государственный стандарт*;

ДГ — *детерминированная гипотеза*;
ДН — *"дурная" неопределённость*;

ЗДН — *заданный*;
ЗГП — *задача геометрического программирования*;
ЗПР — *задачи принятия решений*;

И — *игра*;
ИО — *исследование операций*;
ИС — *информационная система*;

КВ — *коэффициент важности*;
КГ — *квантовая гипотеза*;
КИ — *конечная игра*;
КС — *конфликтная ситуация*;
КЭ — *критерий эффективности*;

ЛПР — *лицо, принимающее решение*;
ЛХ — *личный ход*;

МИФИ — *Московский инженерно-физический институт*;
МКЗ — *многокритериальная задача*;
МС — *математическая статистика*;
МпК — *мультипликативный критерий*;
м.о. — *математическое ожидание*;

НД — *нормирующий делитель*;
НС — *нейронная сеть*;
НИЯУ — *Национальный исследовательский ядерный университет*;
НсК — *нейросетевой критерий*;
НФ — *неопределённый фактор*;

ОКЗ — *однокритериальные задачи*;
ОПР — *орган принятия решения*;
ОпСтИг — *оптимальная стратегия игрока*;

ПМ — *платёжная матрица*;
ПН — *Парето-несравнимость*;
ПП — *Парето-предпочтительность*;
ПЭ — *показатель эффективности*;
ПЭл — *пороговый элемент*;
ПЭР — *Парето-эффективные решения*;
ПЭф — *Парето-эффективность*;

РИ — *решение игры*;
РП — *регулярный позином*;

СГ — *статистическая гипотеза*;
СССР — *Союз Советских Социалистических Республик*;
ССИ — *смешанная стратегия игрока*;
СИ — *стратегия игрока*;
СФ — *стохастические факторы*;
СХ — *случайный ход*;
с.к.о. — *среднее квадратическое отклонение*;

ТЗ — *техническое задание*;
ТВ — *теории вероятностей*;
ТПР — *теория принятия решений*;
ТС — *техническая система*;
ТСР — *теория статистических решений*;

Х — *ход*;

ЦН — *целевое назначение*;

ЧК — *частный критерий*;
ЧОП — *человек-оператор*;
ЧСИ — *чистая стратегия игрока*;

ЭО — *эффективность операции*;
ЭТС — *эффективность технической системы*.

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\vec{x} = \left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right)$ — *вектор*;

$\mathbb{N}$ — *множество натуральных чисел*;
$\mathbb{R}$ — *множество действительных чисел*;
$\forall$ — *для любых (для всех)*;

$\{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}\}$ — *множество из трёх элементов* $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{R}$;
$\in$ — *символ принадлежности*;
$\notin$ — *символ непринадлежности*;
- — *символ минус (вычитание)*;
% — *символ процентов*;
– — *символ разности (вычитание) или минус*;
/ — *символ деления (дробь) или обусловленность*;
$+$ — *символ сложения*;

$\frac{1}{2}$ — *символ деления (дробь одна вторая)*;
1/2 — *символ деления (дробь одна вторая)*;

$\cdot$ — *символ умножения*;
$\boldsymbol{AD}$ — *отсутствие знака* $\cdot$ (*умножение* $\boldsymbol{A}$ *на* $\boldsymbol{D}$)
$\equiv$ — *символ тождества*;
$=$ — *символ равенства*;
$\neq$ — *символ неравенства*;
$\approx$ — *символ приближенного равенства*;

$\times$ — *символ размерности, например* $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ — *размерность матрицы, состоящей из* $\boldsymbol{m}$ *строк и* $\boldsymbol{n}$ *столбцов*;

$\cap$ — *символ пересечения*;
$\cup$ — *символ объединения*;

$$\begin{cases} f_1(\vec{x}) \geq f_{1\text{здн}}, \\ \quad \vdots \\ f_i(\vec{x}) \geq f_{i\text{здн}}; \end{cases}$$ — *система неравенств*;

$$\begin{cases} c_1 \cdot a_{11} + c_2 \cdot a_{12} + c_3 \cdot a_{13} = 0, \\ c_1 \cdot a_{21} + c_2 \cdot a_{22} + c_3 \cdot a_{23} = 0, \\ c_1 \cdot a_{31} + c_2 \cdot a_{32} + c_3 \cdot a_{33} = 0, \end{cases}$$ — *система уравнений*;

$<<$ — *символ намного меньше*;
$>>$ — *символ намного больше*;
$<$ — *символ меньше*;
$>$ — *символ больше*;
$\leq$ — *символ меньше или равно*;
$\geq$ — *символ больше или равно*;

$\sum\limits_{i=1}^{n}$ — *символ знака суммирования, где индекс* i *пробегает значения от* 1 *до* n;

$\sum\limits_{i \in J_k} \delta_i$ — *символ знака суммирования, где индекс* i *пробегает значения из множества* J_k;

$\prod\limits_{i=1}^{n}$ — *символ знака произведения, где индекс* i *пробегает значения от* 1 *до* n;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$ — *матрица размером* $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$;

$\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$ — *индекс* $\boldsymbol{i}$ *принимает целочисленные положительные значения от* 1 *до* $\boldsymbol{n}$ *включительно (предполагается, что* $\boldsymbol{n}$ *— целое и положительное)*;

$\boldsymbol{i}=1\div\boldsymbol{n}$; — *индекс* $\boldsymbol{i}$ *принимает целочисленные положительные значения от* 1 *до* $\boldsymbol{n}$ *включительно с шагом* 1 *(предполагается, что* $\boldsymbol{n}$ *— целое и положительное), т.е. это обозначает то же самое, что и* $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3,..., $\boldsymbol{n}$;

exp ($\boldsymbol{x}$) — *функция* $e^{\boldsymbol{x}}$;

e — число Эйлера, $e\approx 2.718281828459045$;

min — *минимум*;

max — *максимум*;

extremum — *минимум (* min *) или максимум (* max *)*;

$\min\limits_{1\le j\le n}\left\{a_{ij}\right\}$ — *минимум ищется на множестве элементов* a_{ij}, *у которых индекс* $\boldsymbol{j}$ *пробегает значения от* 1 *до* $\boldsymbol{n}$ *с шагом* 1;

$\max\limits_{1\le i\le m}\left\{a_{ij}\right\}$ — *максимум ищется на множестве элементов* a_{ij}, *у которых индекс* $\boldsymbol{i}$ *пробегает значения от* 1 *до* $\boldsymbol{m}$ *с шагом* 1;

$\max\limits_{1\le i\le m}\left(\min\limits_{1\le j\le n}\left\{a_{ij}\right\}\right)$ — *сначала ищется минимум, а затем уже ищется максимум*;

$\min\limits_{1\le j\le n}\left(\max\limits_{1\le i\le m}\left\{a_{ij}\right\}\right)$ — *сначала ищется максимум, а затем уже ищется минимум*;

$\min\left\{20, 30, \mathbf{15}\right\}$ — *поиск минимального элемента среди множества из трёх чисел*;

$\max\left\{\mathbf{25}, 20, \mathbf{25},\ 5\right\}$ — *поиск максимального элемента среди множества из четырёх чисел*;

$\min\limits_{\vec{x}\in M}$ — *минимум ищется на множестве точек* $\vec{x}$ области M;

$\max\limits_{d \in D}\left\{W\left(\boldsymbol{U}, d\right)\right\}$ — *максимум ищется на множестве элементов d (точек), из множества D*;

$x \to \max$ — *x стремится к максимуму*;

$\to$ — *символ знака соответствия или следствия (следует)*;

$\Rightarrow$ — *символ знака соответствия или следствия (следует)*;

$\Leftrightarrow$ — *символ знака эквивалентности*;

const — *некая константа*;

sin(α) — *синус угла* **α**;

cos(α) — *косинус угла* **α**;

$x_{\mathbf{min}}$ — *координата (на оси x) точки минимума функции (позинома)*;

$y_{\mathbf{min}}$ — *координата (на оси y) точки минимума функции (позинома)*;

$z_{\mathbf{min}}$ — *координата (на оси z) точки минимума функции (позинома)*;

$x_{\mathbf{min}\,i}$ — ***i***-я *координата (на оси x_i) точки минимума функции (позинома)*;

$\varnothing$ — *пустое множество*; *невозможное событие*;

$M\left[W\right]$ — *математическое ожидание показателя W*;

A={*торпедирован корабль*} — *формулировка события **A**, состоящего в том, что торпедирован корабль*;

P(***A***) — *вероятность события **A***;

P(***A***|***H***) — *условная вероятность события **A**, вычисленная при условии, что имело место событие **H***;

A|***H*** — *событие **A** при условии, что имело место событие **H***;

A — *событие **A***;

H — *гипотеза или событие **H***;

H — *критерий Гурвица*;

$\boldsymbol{A_i}$ — ***i***-я *стратегия* (*возможный вариант решения*);

$\mathbf{П}_{\boldsymbol{j}}$ — ***j***-й *вариант возможных условий, предположений* (*или **j**-я ситуация*);

$\boldsymbol{H_i}$ — ***i***-я *гипотеза* (*событие*);

V — *критерий Вальда*;

S — *критерий Сэвиджа*;

L — *критерий Байеса (Лапласа);*

$|\boldsymbol{a_{ij}}|$ — *матрица с элементами* $\boldsymbol{a_{ij}}$;

$\boldsymbol{\chi}$ — *коэффициент пессимизма*;
[0; 1] — *отрезок на числовой прямой от* 0 *до* 1;
[***de***] — *отрезок от точки* ***d*** *до точки* ***e***;
[***bc***) — *линия от точки* ***b*** *до точки* ***c*** *(точка* ***b*** *включена, а точка* ***c*** *нет)*;

0.01— *число нуль целых одна сотая*;

$S_A=(p_1, p_2)$ — *смешанная стратегия игрока* ***A****, где первая стратегия применяется с вероятностью (частотой)* p_1*, а вторая* — с p_2;

$S^*_A=(p_1, p_2)$ — *оптимальная смешанная стратегия игрока* ***A***;

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$— *смешанная стратегия игрока* ***A****, где первая стратегия* A_1 *применяется с вероятностью (частотой)* $\frac{1}{3}$*, а вторая* A_2 — с $\frac{2}{3}$;

α — *нижняя цена игры или некоторая переменная*;
β — *верхняя цена игры или некоторая переменная*;
ν — *цена игры или некоторая переменная*;
() — *круглые скобки для записи выражений*;
{} — *фигурные скобки для записи выражений*;
[] — *квадратные скобки для записи выражений*;

■ — *символ конца решения, примера, формулировки следствия, леммы, теоремы или их доказательства.*

Сергей Дмитриевич Кулик

ЭЛЕМЕНТЫ
ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ
(критерии и задачи)

Учебное пособие

Редактор *Е.Е. Шумакова*
Оригинал-макет подготовил *С.Д. Кулик*

Подписано в печать 10.12.2009. Формат 60х84 1/16
Печ. л. 11,75. Уч.-изд.л 12,0. Тираж 100 экз.
Изд. № 1/4/27. Заказ № 27

Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ».
115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31.

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42